



# Processus de Diffusion Discret Opérateur Laplacien appliqué à l'étude de surfaces

Frédéric Rieux

## ► To cite this version:

Frédéric Rieux. Processus de Diffusion Discret Opérateur Laplacien appliqué à l'étude de surfaces. Mathématiques [math]. Université Montpellier 2, 2012. Français. NNT : 9744623 . tel-01174715

**HAL Id: tel-01174715**

**<https://theses.hal.science/tel-01174715>**

Submitted on 9 Jul 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ACADÉMIE DE MONTPELLIER  
**U N I V E R S I T É M O N T P E L L I E R I I**  
Sciences et Techniques du Languedoc

# THÈSE

présentée au Laboratoire d'Informatique de Robotique  
et de Microélectronique de Montpellier pour  
obtenir le diplôme de doctorat

*Spécialité* : **Informatique**  
*Formation Doctorale* : **Informatique**  
*École Doctorale* : **Information, Structures, Systèmes**

## **Processus de Diffusion Discret** **Opérateur Laplacien appliqué à l'étude de surfaces**

par

**Frédéric RIEUX**

Version du 30 aout 2012

**Directeur de thèse**

M. Christophe FIORIO, professeur ..... LIRMM, Université Montpellier II

**Co-Directeur de thèse**

M. Christian MERCAT, professeur ..... IREM, Université Lyon 1

**Rapporteurs**

M. Remy MALGOUYRES professeur ..... LIMOS Université d'Auvergne (Clermont 1)

M. David COEURJOLLY Directeur de Recherche-CNRS ..... LIRIS Université de Lyon

**Examineurs**

M. Jacques-Olivier LACHAUD , professeur ..... LAMA, Université de Savoie

M. Thierry MONTEIL, chargé de recherche CNRS ..... LIRMM, Université Montpellier II



*Pour les anatidaephobes de ce monde ...*







---

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2 Introduction à la géométrie discrète</b>	<b>7</b>
2.1 Introduction . . . . .	8
2.2 Espace Discret . . . . .	9
2.2.1 Distances discrètes . . . . .	9
2.2.2 Notion de k-voisinage . . . . .	9
2.3 Discrétisation d'un contour discret . . . . .	11
2.3.1 La méthode OBQ (Object Boundary Quantization) . . . . .	11
2.3.2 La méthode BBQ (Background Boundary Quantization) . . . . .	12
2.3.3 La méthode GIQ (Great Intersect Quantization) . . . . .	13
2.3.4 La méthode de Supercouverture . . . . .	13
2.4 Droites Discrètes . . . . .	14
2.4.1 Code de Freeman . . . . .	14
2.4.2 Vers une caractérisation des droites discrètes . . . . .	15
2.4.3 Droites Arithmétiques de Reveilles . . . . .	16
2.5 Algorithme de reconnaissance incrémental . . . . .	18
2.5.1 Droites et points d'appui . . . . .	18
2.5.2 Algorithme de reconnaissance . . . . .	19
2.5.3 Applications à la segmentation de contour . . . . .	20
2.5.4 Vers une définition des tangentes discrètes . . . . .	21
2.5.5 Cas des contours avec du bruit : reconnaissance de segments flous . . . . .	22
2.6 Conclusion . . . . .	22

<b>3</b>	<b>De la segmentation de courbe à la convolution binomiale</b>	<b>25</b>
3.1	Introduction	25
3.2	Estimations des tangentes par segmentations	27
3.2.1	Algorithme de Vialard	27
3.2.2	Algorithme de Fabien Feschet et Laure Tougne	28
3.2.3	Estimations des tangentes : méthodes $\lambda$ -MST	29
3.2.4	Algorithme de décomposition en arc de cercles	31
3.2.5	Conclusion	33
3.3	Estimations par convolutions	33
3.3.1	Algorithme de M. Worring and A. W. Smeulders	33
3.3.2	Estimation des tangentes filtrages médians	34
3.3.3	Estimation des dérivées d'ordre $n$ par convolution binomiale	35
3.3.4	Tangentes discrètes par moindres carrés	36
3.4	Conclusion	38
<b>4</b>	<b>De l'équation de diffusion de la chaleur vers les processus discrets</b>	<b>39</b>
4.1	introduction	40
4.2	Équation de la chaleur	41
4.2.1	Cas de surfaces réelles	41
4.2.2	Application du Laplacien discret à l'étude géométrique	42
4.3	Introduction aux processus Markoviens discrets	45
4.3.1	Définitions	45
4.3.2	Chaines de Markov sur un ensemble fini d'états	46
4.3.3	Probabilités de transition	47
4.3.4	Décomposition spectrale	48
4.4	Processus de diffusion discret	49
4.4.1	Définitions et propriétés	49
4.4.2	Diffusion sur des droites discrètes.	52
4.5	Processus discret Flou	59
4.5.1	Paramétrisation Curviligne des droites discrètes	60
4.5.2	Épaississement des contours discrets	61
4.5.3	Matrices Fuzzy et projections curvilignes.	63
4.5.4	Calcul des probabilités des pixels fantômes	66
4.5.5	Conclusion	68
4.6	Opérateur Laplacien discret	69
4.6.1	Définition de l'équation de diffusion discrète	69
4.6.2	Étude des vecteurs propres du Laplacien	70
4.6.3	Expérience de Chladni discrète	76
4.6.4	Noyau de la diffusion	76
4.6.5	Généralisation sur les réseaux de diamants	78
4.7	Convergence vers l'opérateur usuel sur une surface quelconque	82

4.7.1	Surfaces conformes . . . . .	82
4.7.2	Opérateur Laplacien et diffusion sur une surface conforme . . . . .	84
<b>5</b>	<b>Application du processus de Diffusion discret à l'estimation de la courbure</b>	<b>87</b>
5.1	Introduction . . . . .	88
5.2	Courbure de graphes de fonctions réelles . . . . .	89
5.2.1	Courbure géométrique . . . . .	89
5.2.2	Détermination du cercle osculateur . . . . .	90
5.2.3	Courbure de fonctions paramétriques . . . . .	92
5.2.4	Courbure de fonctions paramétriques polaires . . . . .	93
5.2.5	Courbure de fonctions polaires . . . . .	93
5.2.6	Courbure des graphes de fonctions . . . . .	93
5.3	Estimation des dérivées . . . . .	93
5.3.1	Méthode des différences finies . . . . .	94
5.3.2	Produit de convolution . . . . .	95
5.3.3	Résultats estimation des dérivées avec le masque adaptatif. . . . .	99
5.3.4	Estimations par la méthode des moindres carrés . . . . .	99
5.3.5	Généralisation aux surfaces en dimension trois . . . . .	103
5.4	Application à l'estimation de la courbure . . . . .	106
5.4.1	Dérivées d'ordres supérieurs . . . . .	106
5.4.2	Étude de la convergence multigrille . . . . .	108
5.4.3	Applications à la courbure de fonctions réelles . . . . .	112
5.4.4	Conclusion et perspectives . . . . .	113
5.5	Détection de bruit dans un contour . . . . .	115
5.5.1	Paramétrisation curviligne . . . . .	115
5.5.2	Détection de bruit et résultats . . . . .	116
5.6	Conclusion . . . . .	117
<b>6</b>	<b>Filtrage par Convolution Adaptative</b>	<b>119</b>
6.1	Introduction . . . . .	120
6.2	Introduction au traitement d'images . . . . .	121
6.2.1	Image et modèle de bruit . . . . .	121
6.2.2	Filtres Moyenneurs . . . . .	123
6.2.3	Filtres Médiants . . . . .	125
6.3	Filtres basés sur les équations aux dérivées partielles . . . . .	126
6.3.1	Modèle de Perona et Malik . . . . .	127
6.3.2	Filtre de Kuwahara . . . . .	130
6.3.3	Filtre basé sur les plus proches voisins . . . . .	132
6.3.4	Conclusion . . . . .	133
6.4	Application du Laplacien comme filtre moyennneur . . . . .	134
6.4.1	Chaine de Markov sur une Image en niveau de gris . . . . .	137

6.4.2	Exemples de construction de Masques et Comparaisons . . . . .	138
6.5	Résultats . . . . .	142
6.5.1	Applications au débruitage d'images en niveau de gris . . . . .	142
6.5.2	Optimisation par courbes de niveaux . . . . .	143
6.5.3	Comparaison avec les méthodes classiques . . . . .	147
6.6	Application en astrophysique à la détection de sources ponctuelles . . . . .	147
6.6.1	Contexte et données d'acquisition . . . . .	147
6.6.2	Significativité et lissage . . . . .	150
6.7	Conclusion . . . . .	152
	<b>Bibliographie</b>	<b>155</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>161</b>

# Introduction

L'analyse d'images est un domaine de la recherche très actif. Il s'agit d'utiliser un ordinateur pour décrire de façon automatique un contenu visuel. Son domaine d'application est très varié, on le retrouve notamment en imagerie aérienne, en imagerie médicale, en imagerie astrophysique, en vidéo surveillance ou encore, dans l'imagerie de l'ingénierie. L'acquisition de données pour constituer une image d'un objet ne se fait pas sans perte. Il dépend avant tout de la fiabilité du matériel d'acquisition, de la méthode d'enregistrement ou de compression. Cette image sert de support pour la détection d'objets dissimulés que notre œil seul ne serait en mesure de voir. La détection de ces objets passe par une analyse géométrique, de détection et de reconnaissance de formes, pour préserver et renforcer ces détails dans une image. Nous proposons d'étudier ces approches géométriques dans un autre cadre que l'analyse et le traitement du signal. Plusieurs de ces approches [Tsc; ALM92; PM90; MBF08] sont basées sur un modèle continu, discrétisé pour s'appliquer à l'imagerie, à un maillage ou sur une grille régulière de  $\mathbb{Z}^n$ . Notre objectif est de proposer un modèle discret qui unifie toutes ces approches dans un cadre théorique, quel que soit le modèle de représentation discret. Ainsi, on proposera une méthode originale d'estimations des paramètres géométriques d'une structure discrète et on retrouvera à l'aide d'applications classiques les modèles initiaux basés sur des discrétisation de processus continus. L'une de ces applications est par exemple la détection d'étoiles ou de rayonnement dans le ciel, une application détaillée au Chapitre. 6. La précision des capteurs en astrophysique donne une image du ciel avec des sources lumineuses interférant avec le signal étudié. Ces sources cachent celle que l'on souhaite détecter. L'analyse d'images consiste en la réduction de l'intensité de ce surplus de données, sans détruire le signal source. Un grand nombre de méthodes existe sur le sujet par exemple [Tsc; ALM92; PM90; LFB94; BCM10; Bak02; CLMC92]. La plus classique est d'effectuer une moyenne de chaque intensité de couleurs d'une image, dans un voisinage restreint. De

cette façon, la valeur d'un pixel dépendra de la valeur des pixels de son voisinage. En 2008 [MBF08], cette approche a été étudiée dans un autre cadre que l'analyse d'image : l'analyse de structures discrètes, appelée géométrie discrète.

La géométrie discrète est une discipline relativement nouvelle qui a pris son essor avec l'avènement des ordinateurs. Un écran d'ordinateur composé de pixels est un espace discret par excellence. Les premiers problèmes qui sont apparus étaient relativement simples : comment représenter une droite sur un écran d'ordinateur, ou même un cercle ? En 1962, Jack Bresenham alors ingénieur chez IBM, propose un algorithme de tracé de droite sur un écran discret [Bre65]. En 1977 il introduit un algorithme de tracé de cercle discret [Bre77]. Se pose alors la question d'étudier ces objets dont le comportement est très différent par rapport à leurs pendants en géométrie euclidienne. Comment reconnaître des objets discrets, définir une notion de distance entre deux points, reconnaître des formes et estimer les paramètres géométriques d'un objet plus complexe sur un espace discret de dimensions supérieures. Dans ce cadre, utiliser comme support la géométrie euclidienne pose problème dans la gestion de la discrétisation des notions euclidiennes. Au problème du calcul et de la reconnaissance, apparaît le problème des imprécisions. Le calcul oblige à gérer les erreurs entre chaque passage du discret vers le continu puis du continu vers le discret. L'objectif de la géométrie discrète est de fournir un calcul en nombres entiers, pour s'affranchir des problèmes rencontrés lors du passage continu-discret. Mais pour cela, il fallait redéfinir les objets classiques de la géométrie euclidienne tels que les droites ou les cercles, l'algorithme de tracé n'étant pas suffisant pour donner une définition générale. Freeman propose en 1961 un codage d'un objet discret en fonction des directions successives prises par son contour [Fre61]. Cela permet de définir une sorte de régularité dans les directions prises par une droite discrète et d'essayer de fournir une définition. Les travaux de Rosenfeld en 1977 [Ros74] puis Hung en 1983 et 1985 [HK83; Hun85] tentent de donner une façon de caractériser les droites discrètes. En 1991, Jean-Pierre Reveilles [Rev91] propose une définition arithmétique des droites discrètes. En 1995, Isabelle Debled-Renesson utilise cette définition pour établir un algorithme de reconnaissance de segments discrets [DRR95]. Enfin les travaux de Laure Tougne et Fabien Feschet en 1999 [FT99] utilisent la propriété des segments maximaux sur un contour discret pour faire de l'analyse discrète. D'autres travaux feront suite à l'analyse discrète, calculer la longueur d'un arc discret, ou calculer la courbure d'un arc ou d'une surface [CK04; CDRT00; LVdV07; MSK95; CDRT00]. Parmi ces travaux, on s'intéresse plus particulièrement à l'étude de la courbure et des tangentes.

En analyse discrète, il existe de nombreuses définitions des tangentes ou de la courbure. L'estimation des tangentes basée sur la segmentation du contour tient compte de la définition des segments de recouvrement du contour. Il existe les méthodes d'approximation basées sur celles existantes dans le domaine du continu, convolution par la méthode des différences finies, moyenne pondérée des directions tangentielles... En ce qui concerne la courbure, le même problème se pose : approche géométrique par reconnaissance de cercle osculateur discret en un point, approximation des dérivées discrètes suc-

cessives... Les algorithmes proposés vont être particulièrement efficaces en fonction des données initiales. Mais en imagerie, un contour discret n'est que l'échantillonnage d'un signal continu, il faut tenir compte du bruit engendré par le passage du continu au discret. En fonction de tous ces critères, il faut mesurer la fiabilité d'un estimateur géométrique. Pour cela, on étudie pour des discrétisations de plus en plus fines d'un contour discret, la stabilité de l'estimateur. En partant d'un signal continu, quand la largeur de la grille de discrétisation tend vers zéro, on retrouve le signal continu, en supposant qu'il n'y ait aucune perte liée à la discrétisation. Qu'en est-il de l'estimateur ? Ce procédé s'appelle la convergence multigrille et elle fournit un critère important pour caractériser la pertinence d'un estimateur et il existe peu de méthodes qui sont prouvées comme telles. Il en existe deux en particulier qui ont fait l'objet d'une étude attentive dans le Chapitre 3. La première a été introduite en 2007 [LVdV07] et repose sur le recouvrement d'un contour par des segments maximaux et l'autre en 2008 [FM08], sur la convolution binomiale. La convolution binomiale est largement utilisée [LFB94; WS93; FM08] en imagerie pour réduire l'intensité du bruit. La méthode est donc intéressante car contrairement à celle des segments maximaux, elle se généralise à des courbes en niveau de gris et par définition, elle est résistante au bruit. Cependant on sait que ce type d'approche n'est pas satisfaisant car on voudrait que localement, la convolution tienne compte de la géométrie de la courbe. C'est pourquoi en imagerie, de nombreuses méthodes développent des masques adaptatifs qui vont par exemple, détecter une forte variation du gradient pour limiter le support du noyau. Ainsi, aux abords de contours, on réduira les effets de bords. Ces méthodes sont-elles applicables dans le cadre d'une courbe discrète ?

La méthode de recouvrement par des segments maximaux est très rapide en pratique. Elle permet d'avoir de nombreuses informations sur la courbe. L'inconvénient est qu'elle se base sur l'algorithme de reconnaissance incrémental de segments. Cette approche est relativement sensible au bruit et, de ce fait, oblige à recourir à des algorithmes de reconnaissances plus poussés demandant des paramètres donnés par un utilisateur [NDR07]. Malgré cela, les variations de la longueur des segments dans le contour, permettent la détection des zones de bruit. Elle s'utilise aussi pour estimer la longueur de la courbe et donner une paramétrisation curviligne de celle-ci. Par contre la généralisation aux dimensions supérieures est très complexe car la reconnaissance de plans discrets est un problème toujours actif.

Nous étudierons une approche déjà largement utilisée en géométrie algorithmique basée sur les processus de diffusion. Depuis quelques années, l'étude d'objets en trois dimensions s'effectue par construction d'un maillage à partir d'un nuage de points. A partir de ce maillage, on construit de nombreuses discrétisations d'opérateurs réels ou complexes, tel que l'opérateur Laplacien, pour donner des caractéristiques géométriques de cet objet. Des processus de diffusion sont discrétisés sur une surface et on exploite les contraintes de diffusion pour donner une caractéristique géométrique de celle-ci. Toutes ces théories pour des structures maillées, sont actuellement étudiées au travers du noyau de la chaleur. On regarde comment la chaleur se propage sur une surface et certaines directions parti-



culières donnent des informations sur des symétries, ou des points particuliers. On peut ainsi «signer» chaque point en fonction de la dissipation de chaleur avec ces voisins.

Nous proposons de généraliser cette approche au cas discret. Plutôt que de regarder un maillage, on regarde des pixels ou des voxels et on définit un processus de diffusion basé sur l'adjacence des voxels dans chaque voisinage, ainsi que des opérateurs discrets et on s'affranchit, comme sur des maillages, d'une discrétisation coûteuse. Par ailleurs cette approche permet de donner sur un voisinage donné, une information relative sur la position des voisins les uns par rapport aux autres et détecter ainsi certaines turbulences liées au bruit. On est donc en mesure de donner comme pour la convolution binomiale une estimation des tangentes ou des dérivées, mais avec une pondération locale tenant compte de la géométrie. Nous espérons par cette approche unifier les théories des structures maillées dans une version discrète et de retrouver celles déjà existantes. La convolution binomiale telle que celle utilisée en imagerie est insuffisante car elle ne tient par compte de la géométrie. Cependant elle est convergente mutigrille, et donc fournit un indicateur très fiable. On utilise un processus de diffusion purement discret et on retrouve ainsi une partie des outils de géométrie algorithmique, pour les appliquer directement sur des objets discrets. On aura une pondération locale plus fine que les binomiaux puisqu'elle tiendra compte de la dissipation de la diffusion au travers d'un voisinage. Enfin, on utilisera ce processus sur des courbes en niveau de gris et on retrouvera ainsi des méthodes classiques de réduction de bruit sur la même base théorique.

La thèse rapporte donc nos travaux effectués dans ce domaine. Elle se décompose ainsi :

- **Chapitre 2**, on propose un rappel des notions classiques de géométrie discrète. On cherche ainsi à fixer les différentes notations et les différentes notions qui nous serviront par la suite.
- **Chapitre 3**, il s'agit d'un chapitre d'introduction de géométrie discrète sur l'estimation des tangentes et de la courbure discrète. On étudiera en particulier, les deux méthodes dont on s'est inspirées pour l'estimation des paramètres géométriques. Ce chapitre permet d'établir les connexions et les différences entre les approches, et permet ainsi de comprendre ce qui nous a poussé à étudier celles basées sur les processus de diffusion. L'idée est de proposer une méthode alternative qui prend en compte les avantages et la pertinence de chacune d'elles et de les unir sous une base théorique.
- **Chapitre 4**, on propose une introduction au processus markovien. Il permet d'établir un processus de diffusion discret tel que le noyau de la chaleur. A l'aide d'un bref état de l'art sur les méthodes qui utilisent la diffusion de la chaleur, on mettra en évidence les connexions entre ces différentes approches et comment les utiliser pour caractériser la géométrie d'une surface. Ainsi nous étudierons les vecteurs propres de notre opérateur Laplacien discret défini à partir de notre processus de diffusion, afin d'en extraire comme c'est déjà le cas pour des maillages, des informations géométriques de la surface.

- **Chapitre 5**, nous proposons une estimation des tangentes et de la courbure basée sur le processus de diffusion. Cette méthode est similaire à celle basée sur la convolution binomiale et on montrera qu'elle est convergente multigrille. Par ailleurs on montrera à l'aide d'exemples, qu'elle permet d'obtenir une bonne approximation des dérivées d'ordres supérieures.
- Enfin **Chapitre 6**, nous appliquerons ce processus de diffusion à l'imagerie. Comme dit précédemment, la convolution binomiale est largement utilisée en imagerie pour réduire l'intensité du bruit. Le noyau binomial permet d'effectuer une réduction du bruit en tenant compte de la distance des points les uns par rapport aux autres. Qu'en est-il de notre processus de diffusion sur des images en niveau de gris ? Nous retrouverons ainsi la méthode introduite par Perona et Malik qui utilise un noyau de la diffusion de la chaleur et de limiter la diffusion au contact d'un contour. Ainsi, contrairement au noyau gaussien, ce type de masque préserve et renforce les contours tout en réduisant de façon importante le bruit. On montrera à l'aide d'exemples que le masque adaptatif que nous avons défini agit de la même façon et permet une réduction importante du bruit tout en préservant les structures fines et les contours.



---

# Introduction à la géométrie discrète

La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne. La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi.

---

ALBERT EINSTEIN

## Préambule

*Dans ce chapitre, on introduit les définitions basiques de géométrie discrète ainsi que les principales notations qui serviront dans les chapitres suivant.*

## Contents

---

2.1	Introduction . . . . .	8
2.2	Espace Discret . . . . .	9
2.3	Discrétisation d'un contour discret . . . . .	11
2.4	Droites Discrètes . . . . .	14
2.5	Algorithme de reconnaissance incrémental . . . . .	18
2.6	Conclusion . . . . .	22

---

## 2.1 Introduction

Dans de nombreux domaines tels que l'imagerie médicale, le traitement d'images, l'infographie, les données traitées sont discrètes. On projette un objet continu sur un réseau de capteurs et en sortie, on obtient une grille de points qui échantillonne l'objet réel. On appelle une discrétisation, l'approximation de l'objet continu par une grille discrète. De façon générale, les théorèmes et les propriétés de géométrie euclidienne ne s'appliquent pas à ces objets d'études. Il fallait donc redéfinir toutes les notions de géométrie classique. Deux types de géométrie interviennent dans l'étude d'objets digitaux. La première consiste à approcher un objet discret par des courbes continues pour retrouver des outils connus de géométrie euclidienne. Il s'agit tout en gérant les erreurs d'approximation, d'implémenter des algorithmes de géométrie euclidienne au cas discret. Dans ce cas on parlera de géométrie algorithmique. Pour éviter ces erreurs d'arrondis et d'approximations, une géométrie arithmétique exacte basée uniquement sur des nombre entiers est née. Avec l'avènement de l'informatique, la géométrie discrète a pris son essor. Comment représenter un objet continu sur un écran d'ordinateur ?

L'idée de la géométrie discrète est de redéfinir des notions que l'on retrouve en géométrie euclidienne, en nombres entiers. On commence par définir les objets les plus simples, des primitives tels que les droites, la distance entre deux points, les cercles, etc...D'autre part, être capable d'utiliser les propriétés sous-jacentes à ces définitions pour étudier les objets discrets. Les droites discrètes feront l'objet d'une attention particulière dans ce chapitre. Le premier problème était la représentation d'une droite sur un écran d'ordinateur. Il s'agissait donc d'un problème purement mécanique, dont la résolution proposée par Bresenham en 1965 [Bre65] était purement algorithmique. Pourtant les bases mathématiques de l'étude des droites discrètes ont été étudiées par Bernoulli au XVII<sup>ème</sup> siècle. Ensuite il fallait proposer une méthode pour tracer une droite uniquement en nombres entiers et par suite reconnaître si un ensemble de point est un segment ou non.

Ce chapitre est une introduction à la géométrie discrète. On fera un bref parcours des notions classiques, tels que les espaces discrets ainsi que les notions de voisinage et d'adjacence dans ces espaces. Nous étudierons des problèmes sur les définitions arithmétiques des droites dans un espace discret. L'étude des différents critères et de leurs caractérisations a donné lieu à un premier algorithme de reconnaissance de segments discrets. On verra comment une définition arithmétique des segments discrets a permis la définition des tangentes discrètes. Les tangentes sont un des critères géométriques sur lequel nous concentrerons notre attention dans le chapitre suivant. Enfin, nous verrons les problèmes posés par ces définitions dans le cas de données avec du bruit. Les définitions de tangentes discrètes proposées dans ce chapitre, sont sensibles au bruit, et nous verrons une méthode qui réduit cette sensibilité.

## 2.2 Espace Discret

### 2.2.1 Distances discrètes

Dans cette section nous introduisons le domaine qui fera l'objet de notre étude. Un espace discret, que l'on notera par la suite  $\Sigma$  est un sous ensemble de  $\mathbb{Z}^n$ . On notera  $p_i$  un élément de  $\Sigma$  que l'on appellera voxel (volume élément). Les voxels de  $\Sigma$  peuvent être représentés de deux manières différentes. Soit sous forme d'un point dans la grille  $\mathbb{Z}^n$ , soit comme un élément de volume comme un carré en dimension 2 ou un cube en dimension 3. Ces deux représentations sont duales l'une de l'autre par le centre du volume. Dans la suite on privilégiera la représentation volumique. Un voxel sera donc un volume avec  $\frac{1}{2^n}$  coins.

On peut définir la distance euclidienne sur un espace discret entre deux voxels. Soit  $a = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $b = (y_1, \dots, y_n) \in \Sigma$  :

$$d_2(a, b) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$$

On utilise très peu la distance euclidienne sur les espaces discrets. L'idée de la géométrie discrète est de fournir une géométrie exacte entière ou rationnelle. Pour cette raison on préfère utiliser des distances en nombres entiers telles que la distance de Manhattan :

$$d_1(a, b) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

ou la distance de l'échiquier :

$$d_\infty(a, b) = \max(|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|)$$

Il existe aussi d'autres définitions pour les distances telles que la distance de Chanfrein. Il faut remarquer qu'en fonction de la métrique choisie sur un espace discret, les résultats obtenus sont fort différents. Une bonne définition d'une métrique sur un espace discret est celle qui approche au mieux la distance euclidienne. La métrique permet également de définir un voisinage autour d'un pixel. En fonction de la distance utilisée, le voisinage et les déplacements élémentaires sur une grille discrète ne seront pas les mêmes.

### 2.2.2 Notion de k-voisinage

Dans une surface discrète en deux dimensions, en utilisant la distance  $d_1$  on aura le 4-voisinage, en utilisant la distance  $d_\infty$  on aura le 8-voisinage. La notion de 4 et 8-voisinage est une notion ancienne qui représente le nombre de voisins dans le voisinage d'un pixel. De façon plus topologique, le 4-voisinage représente les pixels qui ont une arête commune

(Figure 2.1(a)), et le 8-voisinage, les pixels qui ont un sommet en commun (Figure 2.1(b)) avec un même pixel. Les sommets sont des objets de dimension 0, les arêtes des objets de dimension 1 et les pixels des objets de dimension 2. On parle alors plus simplement de 0-voisinage, 1-voisinage et 2-voisinage. Cette notation s'exporte plus facilement à des dimensions supérieures. Dans un espace discret de dimension trois, on ajoute simplement le voisinage par face, le 2-voisinage. En ce qui concerne la première notation il faut calculer le nombre de voisins dans le voisinage, ce qui donne du 6-voisinage pour les faces, du 18-voisinage pour les arêtes et du 26-voisinage pour les sommets.

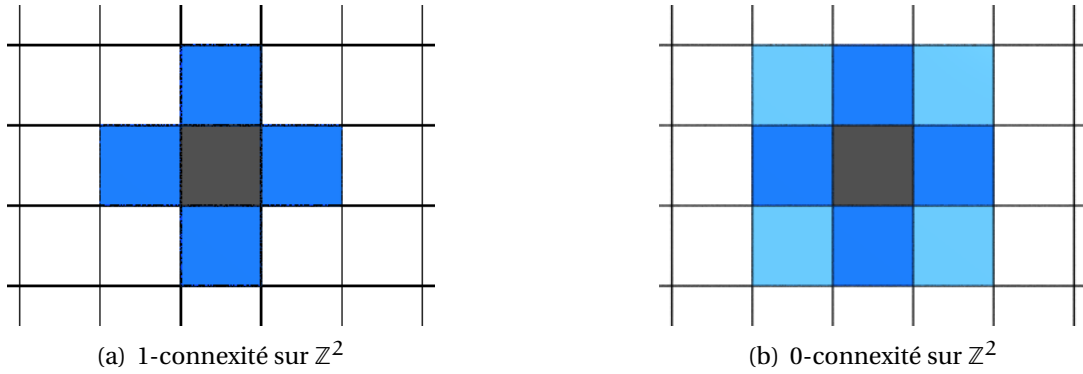


FIGURE 2.1 : Illustration de la 0 et 1 connexité sur  $\mathbb{Z}^2$ .

Pour un espace de dimension supérieure, la notation s'alourdit considérablement. L'idée est d'utiliser la topologie d'un voxel (Figure 2.2(d)) et de simplement regarder la dimension minimale de l'objet en commun avec son voisin. Dans la suite on ne parlera que du voisinage topologique pour simplifier les écritures. Figure 2.2(c), Figure 2.2(b) et Figure 2.2(a) un exemple en trois dimensions du voisinage topologique d'un voxel.

**Définition 2.2.1** *Chemin  $k$ -connexe*

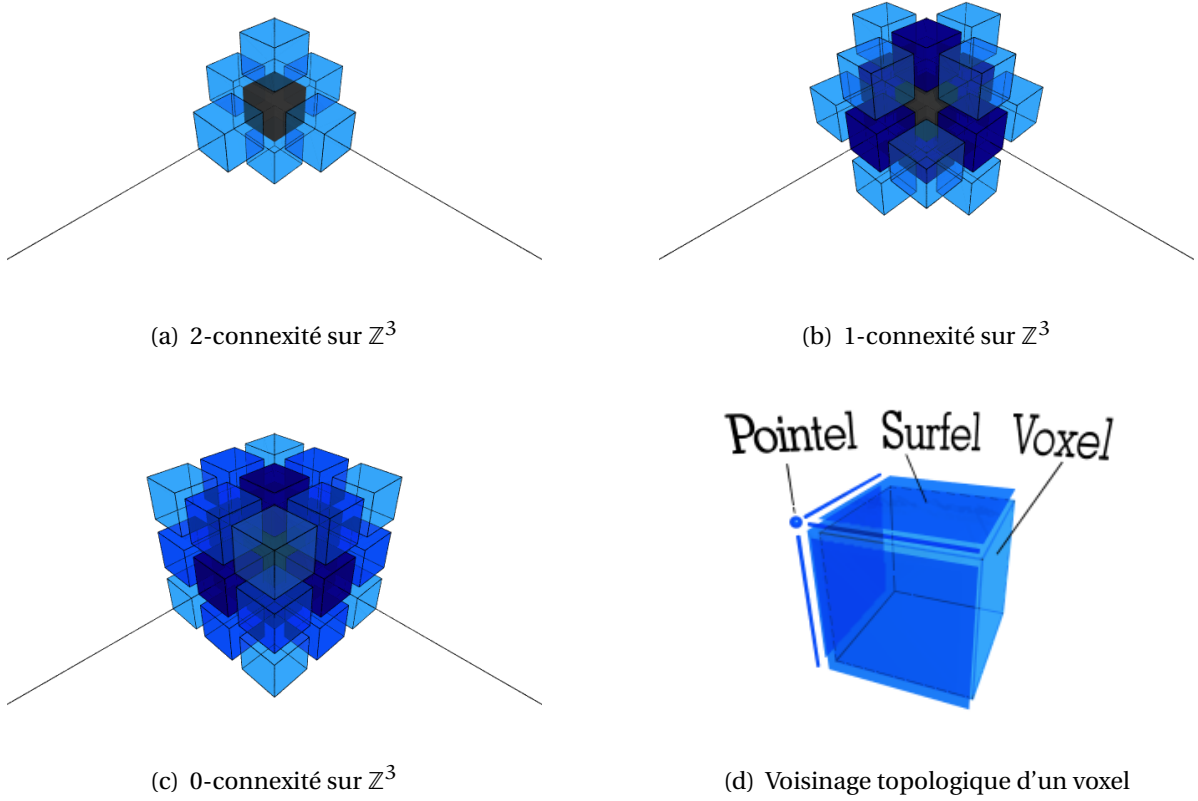
On appelle un chemin dans un espace discret  $\Sigma$  une suite de voxels  $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \Sigma^{n+1}$ . On dira que ce chemin est  $k$ -connexe si pour tout  $j \in [1, n-1]$ ,  $x_j$  et  $x_{j-1}$  sont  $k$ -voisins.

**Définition 2.2.2** *Ensemble  $k$ -connexe*

On dira qu'un ensemble  $\Sigma$  est  $k$ -connexe si et seulement si pour tout  $(x, y) \in \Sigma^2$ , il existe un chemin  $k$ -connexe dans  $\Sigma$  reliant  $x$  à  $y$ .

**Définition 2.2.3**  *$k$ -courbe*

On dira que  $\Sigma$  est une  $k$ -courbe, si  $\Sigma$  est un chemin  $k$ -connexe tel que chacun des pixels de  $\Sigma$  a exactement deux  $k$ -voisins sauf éventuellement  $x_0$  et  $x_n$ . Si  $x_0 = x_n$  on dira que  $\Sigma$  est une  $k$ -courbe fermée.

FIGURE 2.2 : Illustration de la 0, 1 et 2-connexité sur  $\mathbb{Z}^3$ 

## 2.3 Discrétisation d'un contour discret

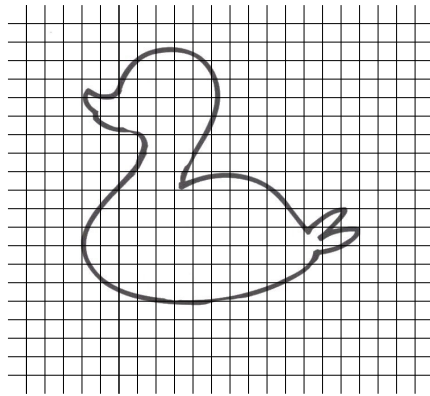
Il existe plusieurs schémas de discrétisation classiques. Un schéma de discrétisation est la représentation sur une grille de  $\mathbb{Z}^n$  d'un signal continu. Un exemple classique est la représentation d'une droite de pente  $\frac{a}{b}$  sur  $\mathbb{Z}^2$ . On présente ici quatre méthodes classiques. Soit  $h$  une variable que l'on appelle le pas de discrétisation, il s'agit de la largeur de chaque élément unitaire de la grille. Chaque méthode de discrétisation utilise une grille, dont la résolution, c'est-à-dire la précision de la discrétisation, est donnée par la valeur  $h$ .

### 2.3.1 La méthode OBQ (Object Boundary Quantization)

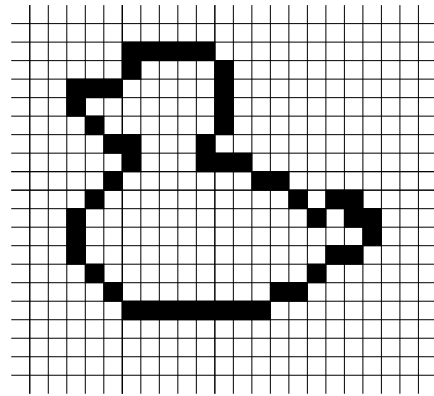
C'est une méthode qu'on appelle aussi méthode des parties entières ([J.99; Rev91]). Le signal continu intersecte la grille du maillage, coupant les arêtes verticales et horizontales



de la grille. On sélectionne alors les pixels de l'arête qui sont situés au dessus de la courbe (Figure 2.3(b)). On obtient une approximation du contour par l'extérieur de la courbe.



(a) Image originale d'un canard

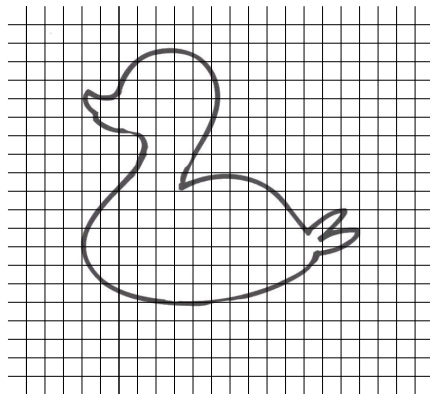


(b) Discrétisation suivant la méthode OBQ

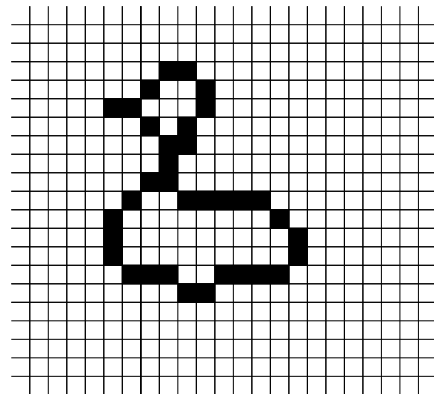
FIGURE 2.3 : Exemple de discrétisation d'un canard suivant la méthode OBQ

### 2.3.2 La méthode BBQ (Background Boundary Quantization)

A la différence avec la méthode précédente, on ne gardera que les points entiers qui se situent à l'intérieur de la courbe (Background, [J.99; Rev91]). On aura donc une approximation du contour par l'intérieur de la courbe (Figure 2.4(b)).



(a) Image originale d'un canard

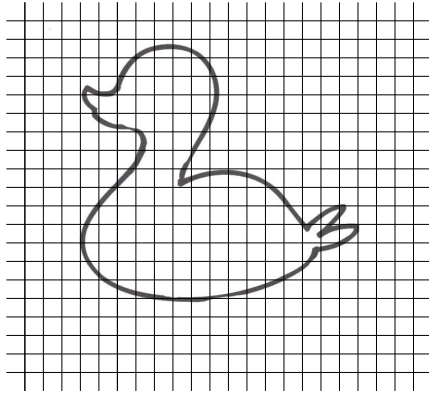


(b) Discrétisation suivant la méthode BBQ

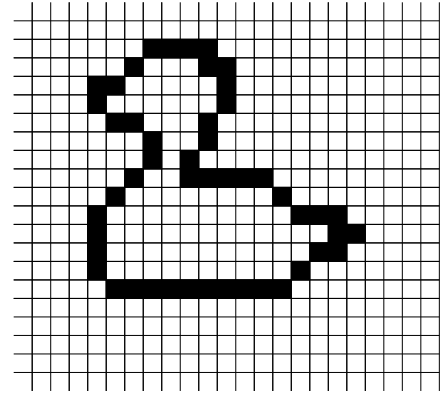
FIGURE 2.4 : Exemple de discrétisation d'un canard suivant la méthode BBQ

### 2.3.3 La méthode GIQ (Great Intersect Quantization)

C'est la méthode la plus utilisée en géométrie discrète pour obtenir un échantillonnage d'un contour ([And00; LW00]). De la même façon que la méthode OBQ, on regardera les arêtes intersectées par la courbe sur la grille. On gardera alors le point entier le plus proche en terme de distance de la courbe (Figure 2.5(b)).



(a) Image originale d'un canard



(b) Discrétisation suivant la méthode GIQ

FIGURE 2.5 : Exemple de discrétisation d'un canard suivant la méthode GIQ

Dans la suite, on utilisera cette méthode de discrétisation. On étudie la convergence multigrille des estimateurs géométriques, et l'on souhaite donc que la discrétisation de l'objet s'approche au mieux du contour continu quand le pas de la grille tend vers zéro. Pour les courbes discrètes  $\zeta$  utilisées Chapitre 5, elles sont obtenues à partir de  $\Psi$ , une courbe réelle définie sur un intervalle  $[a, b]$  de la façon suivante :

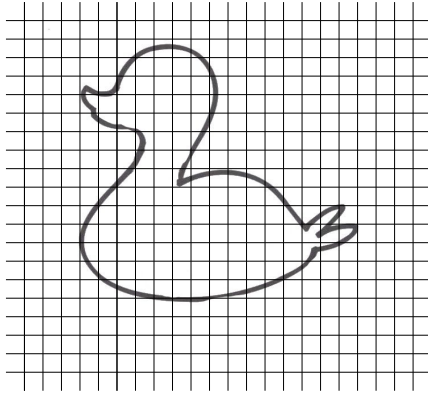
$$\begin{aligned} \zeta : \left[ \left\lceil \frac{a}{h} \right\rceil, \left\lfloor \frac{b}{h} \right\rfloor \right]_{\mathbb{Z}} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ k &\longmapsto \left\lceil \left\lceil \frac{\Psi(k, h)}{h} \right\rceil \right\rceil \end{aligned}$$

avec  $h$  le pas de discrétisation de la courbe. Dans cette section d'introduction, on ne s'est pas préoccupé de la dimension du pixel dans la phase de discrétisation. Dans la suite, la variable  $h$  prendra tout son sens, car elle est la mesure de la précision de la discrétisation. Plus  $h$  sera proche de la valeur nulle, plus la discrétisation sera proche du signal continu. Le retrouver quand  $h$  tend vers zéro, fera l'objet d'une étude plus approfondie dans le chapitre suivant.

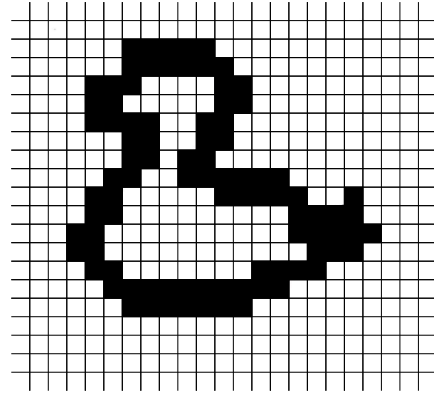
### 2.3.4 La méthode de Supercouverture

Comme son nom l'indique, il s'agit d'un recouvrement maximal de la courbe discrète ([And00; LW00]). On prend tous les points de la grille traversés par la courbe. On obtient un

recouvrement total du signal par des pixels (Figure 2.6(b)). Dans le cas de la méthode précédente, la courbe obtenue après discrétisation n'est pas nécessairement  $k$ -connexe. Pour des raisons pratiques, l'alternative de la supercouverture permet d'obtenir des courbes  $k$ -connexe. Sous certaines conditions, on préférera donc cette méthode de discrétisation à la méthode GIQ.



(a) Image originale d'un canard



(b) Discrétisation suivant la méthode de supercouverture

FIGURE 2.6 : Exemple de discrétisation d'un canard suivant la méthode de Supercouverture

## 2.4 Droites Discrètes

Dans la section précédente, on a introduit diverses méthodes de discrétisation d'un contour et d'une fonction. L'objectif : à partir d'un signal continu comment obtenir la meilleure représentation possible sur une grille de cet objet ? C'est le cas quand on cherche à représenter un objet continu sur un écran d'ordinateur. L'objet le plus simple que l'on peut représenter est une droite. Or le problème de la caractérisation des droites discrètes a longtemps été un sujet d'étude [Fre61; Ros74; HK83; Rev91]. La question n'est pas seulement de tracer sur un écran une droite, mais également justifier qu'un ensemble  $k$ -connexe en est une. D'après les méthodes précédemment introduites, entre deux points d'une grille, en fonction de la méthode de discrétisation et de la connexité utilisée, une même droite peut être représentée de façon différente, ce qui est en contradiction avec la géométrie euclidienne.

### 2.4.1 Code de Freeman

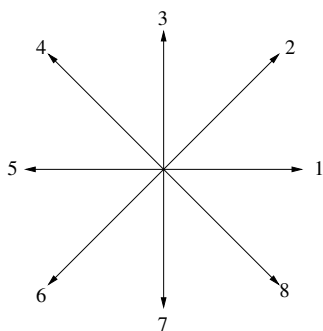
Le problème d'approximation d'une droite par des points entiers apparaît dès le XVIII<sup>e</sup> siècle dans les travaux de J. Bernouilli. Ses travaux portaient sur la régularité des suites d'entiers  $(\lfloor \alpha n + \rho \rfloor)_{n \in \mathbb{Z}}$ . Pour que cette suite soit un fragment de droite discrète, il faut

trouver la bonne valeur de  $\alpha$  tel que  $(\lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor)_{n \in \mathbb{Z}}$  soit une suite périodique. Pour cela il faut que le  $\alpha$  soit rationnel.

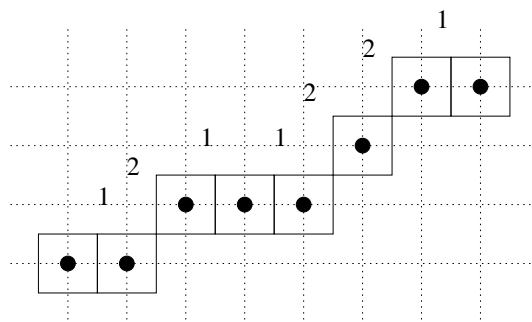
En 1961, Freeman [Fre61] propose une méthode pour coder les 0-courbes et les 1-courbes dans le plans. La courbe s'écrit de façon réversible, comme une suite de déplacements élémentaires sur la grille dans 4 directions pour la 1-connexité ou dans 8-directions pour la 0-connexité (Figure ). On appelle le code de Freeman, un point  $P_0$  de la courbe et une suite d'entiers  $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  ou  $\alpha_i$  est la direction du point  $P_{i+1}$  par rapport à  $P_i$ . Le codage de la courbe permet de révéler des régularités dans les directions successives empruntées par la courbe. Dans le cas d'une droite, les directions doivent être sensiblement identiques. Freeman propose comme caractérisation des droites discrètes les critères suivants. Une k-courbe est un segment discret si :

- (i) Le codage ne contient que deux codes différents et ceux ci ne diffèrent que de 1
- (ii) Un de ces deux codes est toujours isolé dans le codage
- (iii) Ce code apparaît dans le codage le plus uniformément possible

Cette caractérisation des droites discrètes est insuffisante pour pouvoir écrire un algorithme. Les conditions (i) et (ii) traduisent le fait qu'une droite a toujours la même direction, mais il peut apparaître de façon isolée des paliers pour rectifier la pente.



(a) Codage d'une courbe par 0-connexité



(b) Codage d'une courbe 0-connexe

FIGURE 2.7 : Figure de gauche, représentation du code de Freeman pour les courbes 0-connexe, à droite exemple de codage.

### 2.4.2 Vers une caractérisation des droites discrètes

En 1974, Rosenfeld [Ros74] propose une autre caractérisation des segments discrets. Cette caractérisation s'appelle la propriété de la corde et elle est une condition nécessaire et suffisante pour les droites discrètes.

**Définition 2.4.1** *Propriété de la corde* [Ros74]

On dit qu'un ensemble discret  $\Sigma$  vérifie la propriété de la corde si  $\forall (P, Q) \in \Sigma^2, \forall M \in [P, Q], \exists N \in \Sigma, d_\infty(M, N) < 1$ .

La propriété de la corde apporte une précision sur la régularité proposée par Freeman dans la condition (iii). Elle traduit le fait que si l'ensemble contenu dans  $[PQ]$  est un segment discret alors les points qui le composent ne peuvent pas être trop éloignés de la droite passant par  $P$  et  $Q$ .

**Théorème 2.4.2** Rosenfeld 1974 [Ros74]

*Un ensemble fini de pixels  $k$ -connexe est un morceau de segment discret si et seulement si il vérifie la propriété de la corde.*

En 1984 S.H.Y Hung et T. Kasvand proposèrent une autre caractérisation des segments discrets. Leur idée était de voir un segment discret comme un ensemble régulier défini ci-après.

**Définition 2.4.3** S.H.Y Hung et T. Kasvand 1983 [HK83]

*Un ensemble  $\Sigma$  dans le premier octant est dit régulier si  $\forall (A, B, C, D) \in \Sigma^4, |x_A - x_B| = |x_C - x_D| \Rightarrow ||y_A - y_B| - |y_C - y_D|| \leq 1$*

Cette condition est suffisante pour caractériser un segment de droite. Cette condition se traduit en combinatoire des mots par un codage équilibré de l'ensemble  $[\Sigma]$ .

**Théorème 2.4.4** *Un ensemble de pixels 0-connexe est un segment de droite discrète si et seulement si il est régulier.*

Ces propriétés précisent si un ensemble de pixels est un segment de droite, mais la méthode n'est pas constructive. En plus de la reconnaissance, on voudrait avoir les caractéristiques de la pente de la droite. De la même façon, sachant qu'un ensemble discret est un segment de droite, comment retrouver les caractéristiques de la droite à l'origine de ce segment. Les caractérisations présentées ne permettent pas de faire une reconnaissance incrémentale d'un ensemble de points ni de segmenter un contour.

### 2.4.3 Droites Arithmétiques de Reveilles

En 1991, Reveilles [Rev91] propose une définition arithmétique des droites discrètes contrairement aux travaux précédents. Cette définition permet d'établir une reconnaissance incrémentale d'un ensemble de points en tenant compte également de l'épaisseur du segment considéré.

**Définition 2.4.5** Droites Arithmétiques de Reveilles [Rev91]

*Soit  $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ , soit  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\omega \in \mathbb{R}$ . La droite arithmétique  $\mathcal{D}(\vec{v}, \mu, \omega)$  de vecteur normal  $\vec{v}$  de décalage  $\mu$  et d'épaisseur  $\omega$  est le sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^2$  défini par :*

$$\mathcal{D}(\vec{v}, \mu, \omega) = \{x \in \mathbb{Z}^2, 0 \leq x|\vec{v}| < \mu + \omega\}$$

*où  $x|\vec{v}|$  représente le produit scalaire de  $x$  par  $\vec{v}$ .*

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers. La droite de pente  $\frac{a}{b}$  arithmétique d'épaisseur  $\omega$  et de décalage  $\mu$ , se traduit par la double équation diophantienne :

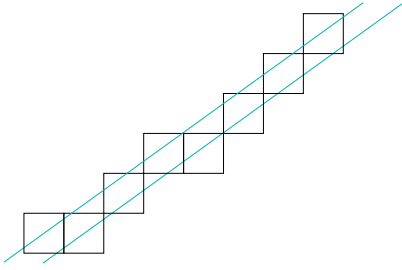
$$0 \leq ax + by + \mu < \omega$$

Une droite discrète arithmétique est donc par définition l'ensemble des points entiers compris entre deux droites réelles  $ax + by = 0$  et  $ax + by + \mu = \omega$ . Le nombre  $\omega$  représente la distance entre les deux droites réelles. C'est donc l'épaisseur de la droite arithmétique. En fonction des valeurs de  $\omega$  la droite peut-être déconnectée ou  $k$ -connexe.

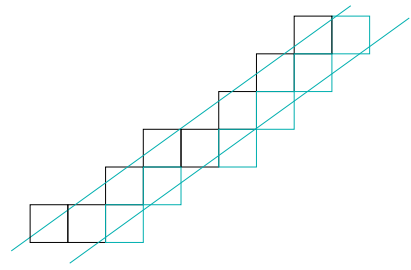
**Théorème 2.4.6** *Reveilles 1991 [Rev91]*

Soit  $\mathcal{D}(\vec{v}, \mu, \omega)$  une droite arithmétique, alors

- $\mathcal{D}(\vec{v}, \mu, \omega)$  est connexe  $\Leftrightarrow \omega > \|\vec{v}\|$
- $\mathcal{D}(\vec{v}, \mu, \omega)$  est 0-connexe  $\Leftrightarrow \omega = \|\vec{v}\|_\infty$
- $\mathcal{D}(\vec{v}, \mu, \omega)$  est 1-connexe  $\Leftrightarrow \omega = \|\vec{v}\|_1$



(a) Exemple de droite 0-connexe



(b) Exemple de droite 1-connexe

FIGURE 2.8 : Exemples de droites 0-connexe et 1 connexe. Sur les deux figures, on a représenté les droites supports qui délimitent les points entiers de la droite.

Les droites 0-connexes sont les droites les plus fines du plan à ne pas être déconnectées (Figure.2.8(a)). Plus la valeur du paramètre  $\omega$  sera large, plus on capturera de points entre les deux droites supports et on aura une droite de plus en plus épaisse (Figure 2.8(b)). Par rapport aux définitions de Freeman, Hung et de Rosenfeld, il y a un nouveau paramètre qui est l'épaisseur de l'ensemble de pixels. Un ensemble de pixels sera un morceau de segment discret si on peut trouver deux droites réelles parallèles espacées d'un facteur  $\omega$ , tel que tous les points soient contenus entre ces deux droites. L'objectif est d'utiliser cette définition arithmétique des droites discrètes pour étalonner la diffusion sur un ensemble. On imagine aisément qu'un objet régulier doit permettre une diffusion tout aussi régulière quelque soit le point de départ de la diffusion. De la même façon, on s'attend à une certaine régularité sur des droites discrètes d'épaisseurs variables.

En 1995, Isabelle Debled-Renesson [DRR95] propose une version incrémentale de reconnaissance de segments discrets. Elle sait non seulement reconnaître s'il s'agit d'un segment de droite mais donne également les caractéristiques de celui-ci.

## 2.5 Algorithme de reconnaissance incrémental

On présente dans cette partie un algorithme incrémental de reconnaissance de segments discrets présenté par Isabelle Debled-Renesson [DRR95]. Il est à l'origine de plusieurs méthodes d'estimation de paramètres géométriques, et on se propose d'en étudier les détails. Comme exemple, on l'appliquera à la décomposition de contours discrets en morceaux de segments discrets. La segmentation de contours sera particulièrement étudiée dans le chapitre suivant (voir Chapitre 3) pour l'estimation des tangentes. Enfin, on verra que la reconnaissance de segments est une méthode relativement sensible au bruit. Pour réduire la sensibilité au bruit, les récents travaux de Isabelle Debled-Renesson et Thanh Phuong Nguyen [NDR07] tentent de faire une reconnaissance moins rigide, en autorisant certains points qui ne sont pas strictement sur le segment discret. Ces segments sont appelés des segments flous à cause de leur paramètre supplémentaire de rigidité, et permettent de définir des estimateurs de courbure plus résistants au bruit.

### 2.5.1 Droites et points d'appui

Dans cette partie appelons  $\mathcal{D}$  un morceau de segment discret d'un ensemble  $\Sigma$ . La question que l'on se pose est la suivante. Sachant que  $\mathcal{D}$  est un segment de droite avec les caractéristiques  $(\vec{v}, \mu, \omega)$ , soit  $M$  un point de  $\Sigma$ , sous quelles conditions  $\mathcal{D} \cup M$  est un morceau de segment discret ? Et quelles sont les nouveaux paramètres ? Pour comprendre la réponse à cette question, on se restreint à la reconnaissance de droite 0-connexe dans le premier octant, c'est-à-dire  $0 < a < b$ .

Les trois possibilités pour le nouvel ensemble  $\mathcal{D} \cup M$  sont :

- $M$  est un point de la droite, dans ce cas  $\mathcal{D} \cup M$  est un segment discret avec les mêmes caractéristiques  $\vec{v}, \mu, \omega$ .
- $\mathcal{D} \cup M$  est un nouveau segment de droite avec de nouvelles caractéristiques à calculer.
- $\mathcal{D} \cup M$  n'est pas un segment de droite.

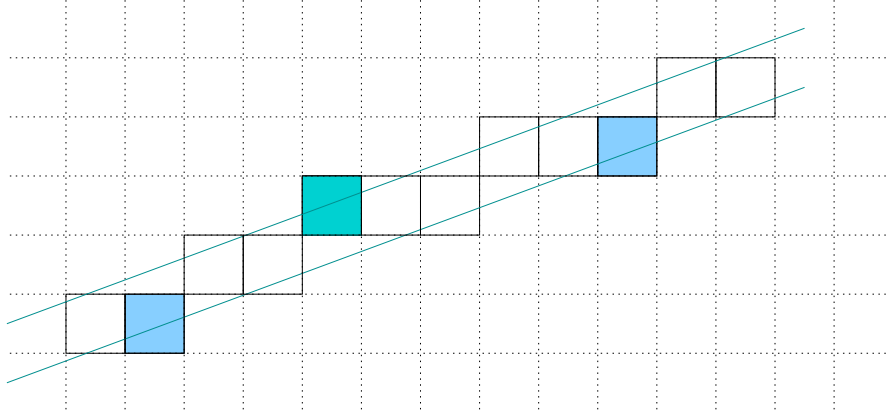
Pour la suite, posons  $\vec{v} = (a, b)$ . Une droite discrète de Revelles est donc l'ensemble des points

$$\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega) = \{x \in \mathbb{Z}^2, 0 \leq ax - by - \mu < \omega\}$$

où  $\frac{a}{b}$  représente la pente de la droite.

**Définition 2.5.1** *Droites et Points d'appuis, Isabelle Debled-Renesson 1995 [DRR95]*

Les droites réelles  $ax - by = \mu$  et  $ax - by = \mu + \omega - 1$  de la droite discrète naïve  $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$  sont appelées droites d'appuis. Les points entiers de ces droites sont appelés point d'appuis.

FIGURE 2.9 : Droites et points d'appuis de la droite 0-connexe  $\mathcal{D}(3, 8, 0, -4)$ 

Cette définition est une conséquence immédiate de celle des droites arithmétiques de Revelles. Sur la Figure 2.9, on a représenté les droites et les points d'appui de la droite  $\mathcal{D}(3, 8, -4)$ . On définit la droite d'appui supérieure, la droite située au dessus de l'ensemble et de la même façon la droite d'appui inférieure qui se situe au dessous. De même, on définit les points d'appui supérieurs et inférieurs. Pour avoir un segment de droite, il faut avoir au moins trois points d'appui. On définit un segment reconnu, un segment de droite qui possède au moins trois points d'appui.

### 2.5.2 Algorithme de reconnaissance

L'ajout de points pour la croissance d'un segment déjà reconnu, nécessite une condition sur son appartenance ou pas à un segment discret. D'après le premier critère de Freeman, selon le code du contour discret, on détermine si le nouveau code peut être le codage d'une droite. Avec la propriété de la corde de Rosenfeld, on élimine un certain nombre de points qui sont trop éloignés du segment discret. Partant d'un segment déjà reconnu, qui a trois points d'appui, on peut faire tourner les droites d'appui autour du point d'appui pour ajuster les caractéristiques de la droite. Notons  $S_0$  le point d'appui supérieur qui a la plus petite abscisse et  $I_0$  le point d'appui inférieur ayant la plus petite abscisse.

**Théorème 2.5.2** *Debled-Renesson 1995 [DRR95]*

Soit  $r(M) = ax - by$ , le reste au point  $M(x, y)$  alors :

- (i) si  $\mu \leq r(M) < \mu + b$  alors  $M \in \mathcal{D}(a, b, \mu)$
- (ii) si  $r(M) = \mu - 1$  alors  $\mathcal{D} \cup M$  est un segment de droite dont les caractéristiques sont données par le vecteur  $S_0M$ .
- (iii) si  $r(M) = \mu + b$  alors  $\mathcal{D} \cup M$  est un segment de droite dont les caractéristiques sont données par le vecteur  $I_0M$ .
- (iv)  $r(M) < \mu - 1$  ou  $r(M) > \mu + b$  alors  $\mathcal{D} \cup M$  n'est pas un segment de droite discrète.



Les propriétés (ii) et (iii) traduisent le fait que le point  $M$  ne doit pas être trop éloigné des droites d'appui du segment déjà reconnu. Dans ce cas, le point  $M$  ajouté devient un point d'appui à son tour car il sera respectivement un point entier de la droite  $r(M) = \mu - 1$  ou  $r(M) = \mu + b$ . Les caractéristiques de la nouvelle droite peuvent alors être mises à jour rapidement avec le vecteur  $S_0M$  ou  $I_0M$ .

### 2.5.3 Applications à la segmentation de contour

L'utilisation de cet algorithme de reconnaissance, permet la segmentation de contours discrets d'une courbe  $k$ -connexe. D'après la condition (iv) du Théorème 2.5.2, on sait quand un ensemble de pixels n'est plus un segment de droite. La seule difficulté est le choix d'un point de départ pour le parcours de la courbe discrète. On ajoute les points au fur et à mesure jusqu'à ce qu'un pixel vérifie la condition (iv). Dès lors, le segment reconnu s'arrête, et on démarre un nouveau segment discret à partir du point d'échec.

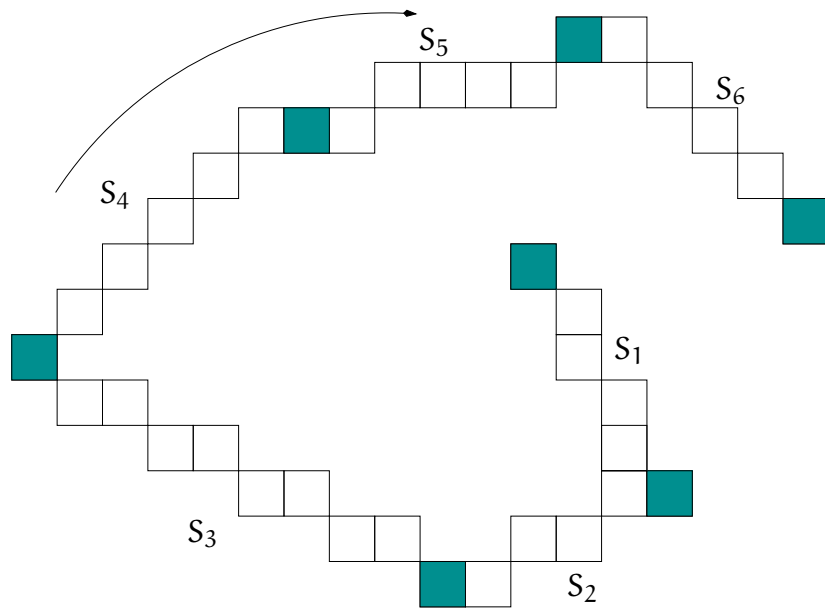


FIGURE 2.10 : Segmentation d'un contour discret

On obtient une segmentation complète du contours discret qui dépend du premier point choisi et du sens de parcours (Figure 2.10). Dans les travaux proposés [LVdV07], une version étendue de la segmentation est utilisée pour avoir une meilleure couverture d'un contour discret. Soit  $C_{i,j}$  l'ensemble de pixels consécutifs d'une courbe  $\Sigma$  compris entre l'indice  $i$  et l'indice  $j$ ,  $i < j$ . Notons le prédicat « $C_{i,j}$  est une segment discret reconnu» par  $S(i,j)$ , c'est-à-dire que tous les points de  $C_{i,j}$  sont contenus dans un segment discret de caractéristique  $(a, b, \mu)$ .

### 2.5.4 Vers une définition des tangentes discrètes

On présente une segmentation du contour maximale. Dans la première version de l'algorithme d'Isabelle Debled-Renesson [DRR95], à partir du moment où un segment discret ne peut plus croître, on démarre un nouveau segment à partir du point d'échec. Jacques-Olivier Lachaud, Anne Vialard et François de Vielleville proposent pour chaque point de l'ensemble, de calculer les segments maximaux qui le contient, c'est-à-dire qui ne peut-être étendu d'aucunes extrémités du segment. Le premier point d'indice  $j$ , tel que cette condition est vérifiée, est appelée  $F()$ . De la même façon on peut définir le premier point d'indice  $i$  tel que  $(S(i, j) \text{ et } \neg S(i-1, j))$  noté  $B()$ .

**Définition 2.5.3** *Jacques-Olivier Lachaud, Anne Vialard, François de Vielleville [LVdV07]*  
*Un ensemble de pixels  $C_{i,j}$  est appelé un segment maximal (MS) si est seulement si on a les caractérisations équivalentes suivantes :*

- $S(i, j) \text{ et } \neg S(i-1, j) \text{ et } \neg S(i, j+1)$
- $B(j) = i \text{ et } F(i) = j$
- $\exists k, i = B(k) \text{ et } j = F(B(k))$
- $\exists k', i = B(F(k')) \text{ et } j = F(k')$

Les tangentes discrètes en un point se déduisent d'un recouvrement d'un pixel de la courbe par des segments maximaux. D'après la définition, on sait qu'en chaque point le recouvrement sera non vide. Toute la difficulté réside dans le choix du bon candidat pour la tangente, soit le plus long segment contenant le point d'intérêt, soit celui le plus centré, donnant à chaque fois des résultats différents.

Dans leurs travaux [LV03], Jacques-Olivier Lachaud et Anne Vialard proposent de définir une tangente discrète en un point  $C_k$  d'une courbe comme le segment discret  $C_{k-\ell, k+\ell}$  avec  $S(k-\ell, k+\ell) \text{ et } \neg S(k-\ell-1, k+\ell+1)$ , appelée tangente symétrique.

Une autre définition proposée par Fabien Feschet et Laure Tougne [FT99] considère le segment maximal avec le plus grand indice qui contient la tangente symétrique en  $C_k$ .

Les tangentes étendues en  $C_k$  sont définies comme les segments qui contiennent la tangente symétrique  $C_{k-\ell, k+\ell}$ , et qui peuvent être étendus dans les deux cas suivants :

- (i) Si  $S(k-\ell, k+\ell) \wedge \neg S(k-\ell, k+\ell+1)$  alors on étend en avant le segment maximal  $C_{k-\ell, F(k-\ell)}$
- (ii) Si  $S(k-\ell, k+\ell+1) \wedge \neg S(k-\ell-1, k+\ell+1)$  alors on étend en arrière le segment maximal  $C_{B(k+\ell), k-\ell}$

En 2007 Jacques-Olivier Lachaud, Anne Vialard et François de Vielleville proposent une autre définition des tangentes discrètes appelée  $\lambda$ -MST et montrent que cette méthode est multigrille convergente. On étudiera plus précisément cette méthode dans le chapitre suivant. En 2011, Laurent Provot et Yan Gérard proposent une estimation des tangentes discrètes d'ordre multiple, dont ils prouvent la convergence multigrille. Cette méthode peut-être vue comme une généralisation des couvertures par segments maximaux.

Toutes ces méthodes sont basées sur la capacité d'établir un recouvrement d'un contour discret. En pratique, les contours discrets sont bruités, c'est-à-dire, qu'un certain nombre de pixels viennent parasiter le contour. L'inconvénient d'un algorithme de reconnaissance point par point, c'est qu'il est relativement sensible à ce type de parasite. Dans le cas du recouvrement par des segments maximaux, en fonction de l'intensité du bruit, la longueur des segments sera beaucoup plus courte que celle attendue, faussant par la même occasion l'efficacité des estimateurs. L'algorithme des segments flous, proposé par Isabelle Debled-Renesson et Thanh Phuong Nguyen [NDR07], permet justement de réduire la sensibilité au bruit (voir Section 2.5.5). À noter toutefois que la sensibilité des algorithmes a fait l'objet d'une étude particulière de Jacques-Oliver Lachaud et Bertrand Kerautret [KL09] et utilise la longueur des segments maximaux détectés pour estimer la quantité de bruit dans un contour. Ainsi ils exploitent le principal défaut de la reconnaissance incrémentale pour établir un algorithme de détection de bruit sur les contours.

### 2.5.5 Cas des contours avec du bruit : reconnaissance de segments flous

Pour comprendre la difficulté de l'adaptation des méthodes d'estimations des tangentes discrètes pour des contours avec du bruit, on présente les travaux d'Isabelle Debled-Renesson et Thanh Phuong Nguyen [NDR07]. Le principe de cet algorithme est d'avoir une reconnaissance de segments moins rigides que la version proposée dans la section précédente. Le problème dans le cas de données avec du bruit, c'est que la croissance des segments est perturbée par le bruit ajouté, et par la même occasion, les segments sont plus courts que ceux attendus, donc moins précis. Les conditions d'arrêt proposés par le Théorème 2.5.2 sont trop contraignantes pour autoriser une croissance malgré le bruit.

**Définition 2.5.4** *Isabelle Debled-Renesson, Thanh Phuong Nguyen [NDR07]*

*Un ensemble de pixels  $S_b$  est un segment flou de taille  $\nu$  si  $\frac{\omega-1}{\max(|a|,|b|)} < \nu$*

Le paramètre  $\nu$  contrôle la rigidité du segment discret. Plus la valeur de  $\nu$  est relâchée, plus les conditions pour un point d'appartenir au segment flou sont importantes. Dans ce cas, on redéfinit des segments maximaux de la même façon que précédemment, afin d'obtenir une couverture tangentielle qui sera plus robuste aux parasites. Néanmoins, il reste le problème pour un utilisateur de choisir la bonne valeur de  $\nu$ . Cette valeur dépend très fortement du type, de la quantité et surtout de la localisation du bruit sur un contour. On pourrait imaginer, au préalable, une détection du bruit dans le contour pour diminuer la rigidité aux abords de cet endroit.

## 2.6 Conclusion

Dans cette partie, on a présenté les notations et les définitions de géométrie discrète que l'on utilisera par la suite. On a également introduit une première méthode de calcul

des tangentes discrètes d'un contour, basé sur la reconnaissance de segments discrets. Néanmoins que ce passe t-il dans le cas où le contour a du bruit ? Les méthodes basées sur la couverture par des segments maximaux d'un contour sont relativement sensibles au bruit et les estimations sont donc fortement dépendantes du taux et du type de bruit dans le contour. Une façon de contourner le problème, est d'avoir une tolérance sur la reconnaissance de segments pour que la couverture soit moins sensible. Et bien qu'en pratique cela donne de très bons résultats, cette approche dépend d'un paramètre qui doit tenir compte du bruit pour être efficace. La difficulté réside dans le choix de ce paramètre. D'autre part, comment valider l'efficacité de ces estimateurs géométriques ? Dans le début de ce chapitre, on a présenté les différentes méthodes de discrétisation de contour discret. Elles prennent en paramètre  $h$ , la largeur de la grille de discrétisation. La question qui se pose est celle de l'efficacité d'estimation quand le pas de la grille tend vers zéro. On aimerait retrouver les paramètres du contour réel sous-jacent à cette discrétisation. On appelle cette validation la convergence multigrille. Dans le chapitre suivant, on reviendra sur une méthode d'estimation des tangentes discrètes appelées  $\lambda$  – MST qui est prouvée comme étant multigrille convergente. Mais comme déjà présenté dans ce chapitre, cette méthode est sensible au bruit. Nos travaux ont été cependant orientés vers une autre approche, prouvée multigrille convergente et qui résiste au bruit (voir Chapitre 3).



---

# De la segmentation de courbe à la convolution binomiale

Notre tête est ronde pour  
permettre à la pensée de changer  
de direction.

---

FRANCIS PICABIA

## Préambule

*Nous proposons dans ce chapitre un bref état de l'art sur les méthodes existantes des estimateurs de tangentes et de courbures discrets. On développera en particulier, les deux approches qui ont motivé les travaux que l'on présentera dans les chapitres suivants.*

## Contents

---

3.1	Introduction . . . . .	25
3.2	Estimations des tangentes par segmentations . . . . .	27
3.3	Estimations par convolutions . . . . .	33
3.4	Conclusion . . . . .	38

---

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'historique des méthodes d'estimations des paramètres géométriques de courbes discrètes. Un certain nombre de travaux sont basés sur

les algorithmes de reconnaissance de segments discrets présentés dans le chapitre précédent. La transformation d'un objet continu en un objet discret provoque un certain nombre d'erreurs. Une mesure de la pertinence d'un estimateur géométrique est l'étude de l'évolution de l'estimation en fonction de la qualité de la discrétisation. Lors du passage du discret vers le continu, une mesure de la précision de la discrétisation est fournie par l'échelle de la grille sur laquelle on plaque l'objet : le pas de discrétisation  $h$ . La réduction du paramètre  $h$  entraîne une amélioration de la discrétisation jusqu'à la limite où  $h \rightarrow 0$  où l'on retrouve l'objet continu. Qu'en est-il de l'estimation des tangentes ? de la courbure ? On dira qu'un estimateur est convergent multigrille si l'estimation des paramètres géométriques converge vers les paramètres réels sous-jacent à l'objet discrétisé quand  $h \rightarrow 0$ . En 2007, Jacques-Olivier Lachaud François de Vieilleville et Anne Vialard [LVdV07] proposent une méthode appelée  $\lambda$ -MST basé sur la reconnaissance de segment discret et démontrent que pour des contours convexes, la méthode est multigrille convergente. Cependant, la méthode de reconnaissance des segments discrets est sensible au bruit, ce qui a amené d'autres travaux sur l'estimation de la courbure discrète et des tangentes par segments flous, dont il n'existe pas de preuve actuelle sur la convergence multigrille [NDR07; MSK95]. En revanche, en 2008, Florent Brunet, Sébastien Fourey et Remy Malgouyres [FM08] proposent une méthode résistante au bruit, déjà largement utilisée en imagerie [Wei96], et l'adaptent à l'estimation des tangentes discrètes. Une méthode d'estimation des tangentes discrètes avait été déjà proposés en 1993 par Woring et Smeulders [WS93] pour étudier la courbure de fonctions discrètes. Ils démontrent que l'estimation utilisant des noyaux gaussiens est multigrille convergente pour les courbes  $\mathcal{C}^1$ , et Alex Esbelin et Remy Malgouyres [EM09] apportent la preuve de la convergence multigrille pour les courbes  $\mathcal{C}^2$  en 2009. En 2011, Yan Gerard et Laurent Provot [PG11] proposent une méthode d'estimation des dérivées comme une généralisation des méthodes par segmentation, résistante au bruit, et montrent qu'elle est aussi convergente multigrille avec une borne d'erreur comprise entre les deux méthodes précédentes. Théoriquement, la méthode par convolution binomiale est donc convergente avec une borne d'erreur inférieure aux deux autres méthodes. C'est cette raison qui a motivé nos recherches sur l'estimation des tangentes discrètes par convolution.

Le chapitre se présente comme suit :

- Dans une première partie, nous étudierons une application des algorithmes de reconnaissance de segments discrets vue au chapitre précédent, à l'estimation de tangentes discrètes. Nous introduirons un historique des estimateurs de tangentes, et nous nous dirigerons vers la méthode proposée par Jacques-Olivier Lachaud François de Vieilleville et Anne Vialard, prouvées convergentes multigrilles.
- Enfin nous étudierons les méthodes d'estimations des tangentes discrètes par filtrage. En imagerie, le filtrage des données en utilisant des noyaux de convolution est largement étudié comme nous le verrons par la suite. Dans cette partie, on étudiera les méthodes basées sur le filtrage, beaucoup plus résistantes au bruit. Nous proposerons en particulier la méthode par convolution binomiale proposé par Florent

Brunet, Sébastien Fourey et Remy Malgouyres prouvées multigrille convergente. Enfin, nous finirons par une méthode récente proposé par Yi Ann, Shao et Wang Li [ASWL11] sur l'estimation des dérivées par la minimisation des moindres carrées, qui rejoint la méthode sur les convolution binomiales.

## 3.2 Estimations des tangentes par segmentations

### 3.2.1 Algorithme de Vialard

L'une des premières méthodes d'estimation des tangentes d'un contour discret se base sur la notion intuitive de tangente. Sur un contour discret à un point P donné, on s'attend à ce que la tangente soit la droite la plus longue passant au point P. L'idée de l'algorithme de Vialard est donc d'utiliser l'algorithme de reconnaissance de segments maximaux présentés au Chapitre 2, P de façon symétrique de part et d'autre du point P.

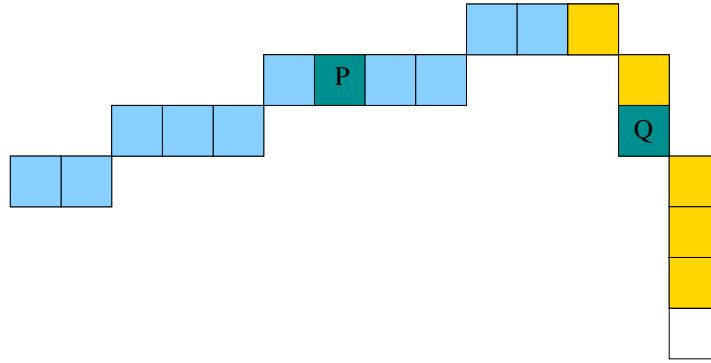


FIGURE 3.1 : Tangentes discrètes d'un contour au point P et Q

**Définition 3.2.1** *Tangente Discrete, Vialard 1996, [Via96]*

Soit  $\mathcal{C}$  une courbe discrète donnée par la suite de ses points  $\mathcal{C} = \{c_0, c_1, \dots, c_n\}$ . La tangente au point  $P = c_i$  est le segment  $\{c_{i-k}, \dots, c_i, \dots, c_{i+k}\}$  tel que  $\{c_{i-k-1}, \dots, c_i, \dots, c_{i+k+1}\}$  n'est pas un segment.

L'algorithme de Vialard consiste à ajouter de façon symétrique des points autour de P tant que l'ensemble final est toujours un segment discret. Remarquons cependant (Figure 3.1) que l'on peut obtenir une meilleure approximation de la tangente en continuant l'extention du segment discret que d'un coté. En effet, du coté du point P, Figure 3.1, la propagation du segment vers la droite est stoppée par un changement brusque de la courbure. Du coté gauche, cette progression peut continuer et c'est pourquoi la définition effective utilisée dans l'algorithme de Vialard est légèrement différente de celle proposée.



**Définition 3.2.2** *Tangente Discrete, Vialard 1996, [Via96]*

Soit  $\mathcal{C}$  une courbe discrète donnée par la suite de ces points  $\mathcal{C} = \{c_0, c_1, \dots, c_n\}$ . La tangente au point  $P = c_i$  est le segment  $\{c_{i-k}, \dots, c_i, \dots, c_{i+k+p}\}$  tel que  $\{c_{i-k-1}, \dots, c_i, \dots, c_{i+k+p+1}\}$  n'est pas un segment.

De cette façon, la tangente calculée n'est pas centrée au point  $P$  comme dans la Définition 3.2.1, mais elle continue sa progression même s'il y a un obstacle d'un des deux cotés. La tangente ainsi calculée est plus longue qu'avec la première définition, et donc plus précise. Pour ces raisons, cette définition sera réutilisée par Fabien Feschet et Laure Tougne pour calculer les tangentes d'un ensemble discret. Remarquons que contrairement à la première définition, celle de la tangente est indépendante de l'orientation choisie de la courbe.

**3.2.2 Algorithme de Fabien Feschet et Laure Tougne**

Le calcul des tangentes par la méthode de Vialard dépend de la longueur de chaque tangente calculée. Dans ce cas, on calcule pour chaque point d'un même segment, une tangente de longueur  $n$ , d'où une complexité quadratique pour le calcul de la couverture tangentielle. L'algorithme de Fabien Feschet et Laure Tougne est une version linéaire de la méthode proposée par Vialard, en détectant les points qui ont une tangente constante tels que les segments discrets. Ainsi, plutôt que de recalculer pour chaque point une tangente sur une partie linéaire, on aura immédiatement l'ensemble de tous les points de même tangente. Pour cela, considérons l'ensemble des points appartenant à la même tangente partant d'un point  $P$ . Notons  $R$  le premier point rejeté par l'algorithme de reconnaissance vers la droite (Figure 3.2(a)). Sachant que l'ensemble  $[P, R]$ , n'est pas un segment, il existe un point  $L$  compris strictement entre  $P$  et  $R$  tel que  $[R, L[$  soit un segment (Figure 3.2(b)). Notons  $M$  le point défini par :

$$d(L, M) = \left\lceil \frac{d(L, R)}{2} \right\rceil$$

Le point  $M$  est le «milieu» du segment  $]L, R]$  (Figure 3.2(c)). Le point  $M$  correspond au premier point de changement de caractéristiques de la pente de la tangente. Les points les plus proches de  $P$  sont les points dont les caractéristiques de la tangente sont constantes, en revanche pour les points les plus proches de  $R$ , les caractéristiques seront différentes. De cette façon, les points compris entre  $P$  et  $M$  seront de caractéristiques constantes. De sorte que, il est inutile de reconsidérer la tangente des points compris au sens strict entre  $P$  et  $M$  et on peut recommencer la recherche de tangente à partir du point  $M$ .

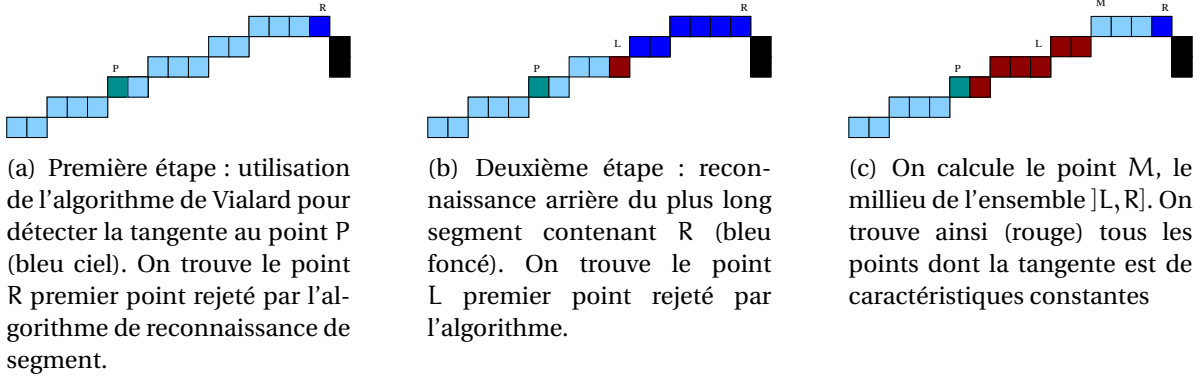


FIGURE 3.2 : Exemple de calcul de l'algorithme de Feschet et Tougne [FT99]. Dans un premier temps on utilise l'algorithme de Vialard pour déterminer la tangente au point P. Ensuite, à l'aide des points R et L, on détermine le point M qui correspond au premier point dont les caractéristiques de la tangente n'est pas la même. De cette façon, plutôt que de calculer en tout point de la courbe les tangentes, on passe directement au point M pour le calcul de la tangente suivante. Dans leur papier, cette astuce permet de passer la complexité de quadratique sur des segments discrets à une complexité linéaire.

### 3.2.3 Estimations des tangentes : méthodes $\lambda$ -MST

Dans la première version de l'algorithme de Vialard [Via96], l'idée était de trouver la droite discrète dont la définition intuitive se rapprochait le plus de la définition d'une tangente. La définition proposée était donc le plus long segment centré en un point P. Pour améliorer l'estimation, Laure Tougne et Fabien Feschet ont proposé d'agrandir au maximum la longueur de la tangente et de ne plus regarder seulement la droite centrée au point P. Cette droite peut donc être excentrée par rapport au point traité, cependant le segment étant plus long, ils montrent dans leur papier [FT99] que cette approche donne de meilleurs résultats. Une autre approche proposée par Jacques-Olivier Lachaud, Anne Vialard et François de Vieilleville, consiste à utiliser la couverture par des segments maximaux de la courbe. Un même point peut appartenir à des segments maximaux de pentes différentes, et dans leur article [LVdV07], ils proposent d'utiliser plusieurs segments contenant le point P pour donner une meilleure approximation de la tangente. Cette méthode est appelée  $\lambda$ -MST, et ils montrent que la méthode est convergente pour des contours deux fois différentiables.

**Théorème 3.2.3** *Jacques-Olivier Lachaud, Anne Vialard et François de Vieilleville, [LVdV07] L'estimateur  $\lambda$ -MST est convergent en multigrille vers la direction tangentielle d'un contour convexe deux fois différentiables et de courbure continue. Une borne supérieure du taux de convergence est de  $O(h^{\frac{1}{3}})$  quand le pas de la grille  $h$  tends vers zéro.*

Dans un premier temps, définissons l'ensemble des segments maximaux contenant un point  $P$  de la courbe. Cet ensemble est nécessairement non vide : chaque point de la courbe appartient au moins à deux segments maximaux, le segment avant et arrière. Les directions de chaque segment maximal contenant le point  $P$  sont notées  $\theta_i$ . En fonction de chaque segment maximal, le point  $P$  peut se retrouver proche du centre ou au contraire proche des extrémités. Pour mesurer la position du point  $P$  sur chaque segment maximal, définissons  $e_i(P)$  l'excentricité du point  $P$  sur le segment d'indice  $i$ . On note  $C_{i,j}$  l'ensemble des points ordonnés du point d'indice  $i$  au point d'indice  $j$ , l'ensemble des segments maximaux  $M_i = C_{m_i, n_i}$  contenant un point  $C_k$  de la courbe est noté  $\mathcal{P}(k) = \{M_i, k \in M_i\}$ . L'excentricité est donc définie comme la position relative du point  $C_k$  par rapport aux extrémités du segment maximal  $M_i$  :

$$e_i(k) = \begin{cases} \frac{\|C_k - C_{m_i}\|}{L_i} & \text{si } M_i \in \mathcal{P}(k) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $L_i = \|C_{n_i} - C_{m_i}\|$

L'excentricité permet de pondérer la direction des segments maximaux en fonction de la distance du point  $C_k$  avec le centre du segment. D'après la définition, un point sera considéré comme au centre du segment maximal, si le point  $C_k$  est équidistant avec les extrémités du segment. On aura donc une excentricité de  $\frac{1}{2}$ . Cela permet d'avoir un juste milieu entre les définitions de Anne Vialard, avec la tangente centrée au point  $C_k$  et la définition de Laure Tougne et Fabien Feschet, avec la tangente la plus longue possible autour du point  $C_k$ . On considère la combinaison linéaire de chacune des directions tangentielles en fonction de l'excentricité du point par rapport aux extrémités. On a donc une caractérisation des directions en fonction de la couverture par des segments maximaux.

**Définition 3.2.4** *Jacques-Olivier Lachaud, Anne Vialard et François de Vieilleville, [LVdV07]*  
La direction  $\lambda$  du segment maximal, en un point  $C_k$  d'un contour discret est défini comme la combinaison pondérée des directions de l'ensemble des segments maximaux contenant le point  $C_k$  :

$$\hat{\theta}_k = \frac{\sum_{i \in \mathcal{P}(k)} \lambda(e_i(k)) \theta_i}{\sum_{i \in \mathcal{P}(k)} \lambda(e_i(k))}$$

La définition de la tangente permet également de réutiliser les  $\lambda$ -directions pour donner une estimation de la courbure. Cette approche ressemble beaucoup à celle proposée par Jiri Matas, Z. Shao et Josef Kittler [MSK95] sur la moyenne pondérée des directions successives des tangentes que l'on développera dans la section suivante. A la différence des segments maximaux, aucune preuve de la convergence multigrille n'a été donnée, mais leur algorithme résiste au bruit par définition de la méthode. Cependant les deux idées sont semblables. Plutôt que de regarder un seul segment de couverture (ou une seule direction dans le cas de [MSK95]), on regarde une moyenne de ces directions. De cette façon,

on peut filtrer et élargir la taille du voisinage autour d'un point et améliorer la précision de l'estimation. L'estimation de la courbure peut se déduire de l'estimation des tangentes. Dans le cas des segments maximaux, l'approche généralement retenue est l'utilisation d'un noyau de convolution Gaussien appliqué à chaque direction [WS93]. Une autre approche a été développée par Tristan Roussillon, Isabelle Sivignon et Laure Tougne dans le cadre de l'estimation de la courbure. Plutôt que de décomposer le contour en une suite de segments maximaux, ce qui est le plus intuitif pour l'estimation des tangentes, ils décomposent le contour en morceaux de cercle. De cette façon, on est en mesure de donner directement une estimation de la courbure en chaque point.

### 3.2.4 Algorithme de décomposition en arc de cercles

Une première approche avait été donnée par David CoeurJolly en 2001 [CMT01] pour calculer directement la courbure d'un contour discret. Il utilise une définition géométrique de la courbure basée sur la connaissance du cercle osculateur pour estimer la courbure en tout point (cf Chapitre 5). En 2009, Tristan Roussillon, Isabelle Sivignon et Laure Tougne [RST10] proposent une mesure de la circularité d'un contour discret. Une approche nouvelle a été proposée par Jacques-Olivier Lachaud et Tristan Roussillon en 2011 [RL11] qui est une généralisation de la décomposition en segments maximaux : on recherche l'ensemble des arcs de cercles maximaux qui recouvrent le contour discret.

Notons  $B$  et  $\bar{B}$  les points intérieurs et extérieurs d'un contour discret (Figure 3.3).

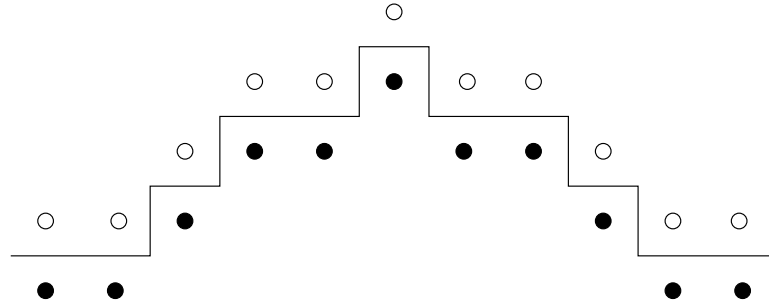


FIGURE 3.3 : Séparation des points intérieurs  $B$  et extérieurs  $\bar{B}$  d'un contour discret

#### Définition 3.2.5 Tristan Roussillon [RST10]

Soit  $B$  et  $\bar{B}$  les points intérieurs et extérieurs d'un contour discret. Un contour discret  $\mathcal{C}$  est un arc de cercle si et seulement si il existe un disque euclidien  $\mathcal{D}(\omega, r)$  qui contient  $B$  mais pas  $\bar{B}$ .

Le problème consiste à déterminer l'ensemble des cercles séparant comme c'est le cas Figure 3.4. Une version incrémentale de l'algorithme de décomposition d'un contour en

arcs de cercle a été proposé par Tristan Roussillon [RST10]. Les travaux de 2011 [RL11] sont une extension de la décomposition d'un contour en arcs discrets maximaux. C'est-à-dire que l'on recherche le cercle séparant maximal sur une partie d'un contour discret.

**Définition 3.2.6** *Tristan Roussillon et Jacques-Olivier Lachaud [RL11]*

Soit  $(A_i)_{i \in 1..n}$  une suite d'arcs de cercle discrets maximaux sur  $C$ . Soit  $(V_i)_{i \in 1..n}$  une partition de  $C$  tel que  $V_i$  est l'ensemble des sommets de la grille les plus proche de  $m(A_i)$  que  $m(A_j)$  avec  $j \in 1..n$  et  $j \neq i$ . Pour un pas de grille donnée  $h$ , l'estimateur de courbure  $\bar{k}_{\text{MDCA}}^h$  est défini comme :

$$\forall i \in 1..n, \forall e \in V_i, \forall p \in e, \bar{k}_{\text{MDCA}}^h = k^h(A_i)$$

avec  $k^h$  la courbure du cercle séparant  $A_i$ .

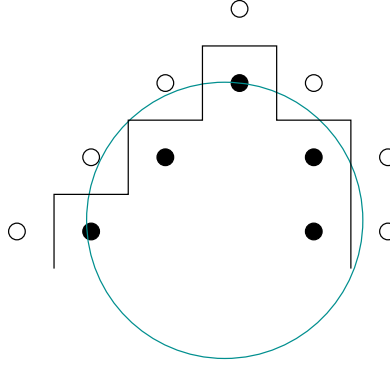


FIGURE 3.4 : Arc de cercle

Une discussion sur la convergence multigrille de cette approche est proposée dans leur article. La méthode propose une alternative rapide, incrémentale et qui donne une estimation de la courbure très performante du contour. La comparaison avec la convolution binomiale proposée en fait une des méthodes les plus performantes sur des contours sans bruit. Dans le cadre de contour bruité, la remarque a été déjà faite sur la sensibilité de cet algorithme. Cependant, cette sensibilité a donné lieu à un détecteur de bruit très efficace [KL09]. Au même titre que les segments maximaux, l'algorithme de détection des arcs de cercles maximaux, a donné lieu à une discussion sur la convergence multigrille et sous réserve de contrainte, ils montrent dans certain cas la convergence uniforme.

**Théorème 3.2.7** *Tristan Roussillon et Jacques-Olivier Lachaud [RL11]*

Soit  $\mathbb{X}$  une famille de compacts convexes de  $\mathbb{R}^2$  de courbure continue, strictement positive bornée. Si la longueur des cercles discrets maximaux le long d'une discrétisation gaussienne  $D_h(X)$ ,  $X \in \mathbb{X}$  a une borne inférieure en  $O(h^a)$  et une borne supérieure en  $O(h^b)$  avec  $0 < b \leq a < \frac{1}{2}$  alors l'estimateur de courbure  $\bar{k}_{\text{MDCA}}^h$  est uniformément multigrille convergent.

### 3.2.5 Conclusion

Dans cette première partie, nous avons introduit des méthodes d'estimation de la courbure et des tangentes basées sur la décomposition d'un contour en primitives discrètes, les segments et les cercles. Elles sont rapides, incrémentales et donnent en pratique les meilleurs résultats. Cependant elles sont sensibles au bruit et c'est l'une des raisons qui a conduit à étudier d'autres alternatives pour des contours avec du bruit. Le problème de séparabilité d'un contour pour détecter des cercles maximaux sera nécessairement beaucoup plus difficile si l'on doit tenir compte d'un certain degré de bruit dans le contour. Néanmoins, il existe des algorithmes qui utilisent cette sensibilité pour détecter des zones de bruit. C'est donc à la fois un problème et un avantage pour avoir un détecteur de bruit automatique dans un contour. Dans la section suivante on propose donc une alternative dans le cas de contour avec du bruit.

## 3.3 Estimations par convolutions

### 3.3.1 Algorithme de M. Worring and A. W. Smeulders

Introduit en 1993 par M. Worring et A. W. Smeulders [WS93], l'algorithme permet de donner une approximation de la courbure d'une courbe discrète, dont celles introduite Section 3.2. L'intérêt, c'est sa résistance au bruit. Elle utilise un filtre gaussien sur les orientations des tangentes pour limiter l'impact du bruit pour les points les plus éloignés de celui traité.

**Définition 3.3.1** *Filtre gaussien tronqué*

On appelle le filtre gaussien tronqué d'écart type  $\sigma$  l'ensemble :

$$\mathcal{G}_\sigma(i) = \left( \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{i^2}{2\sigma^2}} \right)_{i=-3\sigma..3\sigma}$$

Le filtre gaussien tronqué est celui traditionnellement utilisé en analyse d'images. Du centre du masque on ne conserve que les valeurs dans l'intervalle  $[-3\sigma, 3\sigma]$  qui correspondent aux valeurs significatives de la distribution.

Dans les versions précédentes basées sur la segmentation, la décomposition du contour en segments permet d'avoir la direction tangentielle, notée  $\theta$  sur le contour. La courbure sera estimée en appliquant un filtre moyennneur de type gaussien sur l'ensemble des directions tangentielles et on obtient une estimation de la courbure  $\kappa$ .

**Définition 3.3.2** *Estimation de la courbure M. Worring et A. W. Smeulders [WS93]*

Soit  $\mathcal{C}$  une courbe discrète et  $P \in \mathcal{C}$ . Soit  $\theta(P)$  l'angle de la tangente au point  $P$  avec l'axe des abscisses, la courbure au point  $P$  notée  $\kappa(P)$  est donnée par :

$$\kappa(P) = \frac{(\theta * \mathcal{G}_\sigma)(P)}{1.1107}$$

Cette première approche permet de définir un estimateur de la courbure tout en tenant compte d'un certain degré de bruit dans les données initiales. Une autre approche basée sur le filtre médian a été proposée en 1995 [MSK95] pour estimer les directions tangentielles de contour discret.

### 3.3.2 Estimation des tangentes filtrages médians

En 1995, J. Mattas, Z. Shao et J. Kittler [MSK95] proposent une méthode d'estimation des tangentes et de la courbure sur une courbe avec du bruit. L'idée est similaire à celle proposée par Worst et Smeulders en utilisant au préalable un masque de filtrage au voisinage d'un point pour limiter les effets du bruit dans l'estimation des paramètres. En réutilisant les notations de leur article, notons  $\mathcal{C} = (p_i)_{i \in 1..N}$  une courbe discrète. Pour chaque point  $p_i$  on définit la suite des  $2M$  différences avec les points du voisinage  $d_{i,i+j}$  :

$$d_{i,i+j} = \begin{cases} p_{i+j} - p_i & \text{si } j \in 1..M \\ p_i - p_{i+j} & \text{si } j \in -M..-1 \end{cases}$$

Il s'agit de la méthode des différences finies en chaque point du voisinage. On note  $\theta_i$  l'angle polaire du  $j$ -ème vecteur  $d_{i,i+j}$ . La direction de la tangente est donnée par la valeur médiane de la suite des angles triées par ordre croissant.

$$\text{dir}_t = \frac{\theta_M + \theta_{M+1}}{2}$$

La méthode est résistante au bruit puisque par définition, on applique un masque médian de filtrage sur l'ensemble des directions des vecteurs au voisinage du point considéré. Par ailleurs, (Figure 3.5) on remarque que la tangente ainsi obtenue va dépendre de la taille du voisinage de la même façon que la méthode précédente. La largeur du voisinage étant fixée par le nombre de vecteurs  $M$  choisis dans la méthode de différentiation.

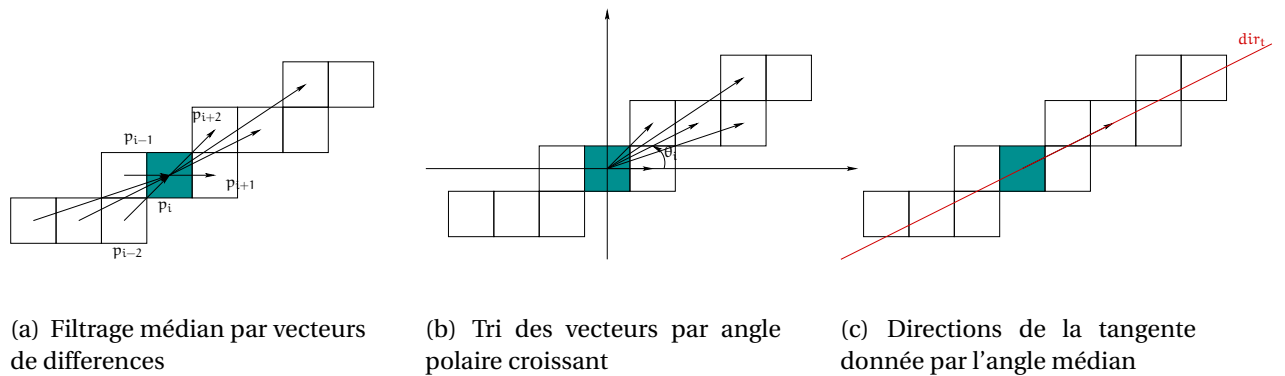


FIGURE 3.5 : Illustration de l'algorithme de J. Mattas, Z. Shao et J. Kittler [MSK95]

### 3.3.3 Estimation des dérivées d'ordre $n$ par convolution binomiale

Proposée par Florent Brunet, Rémy Malgouyres et Sébastien Fourey en 2008 [MBF08], la méthode d'estimation de la dérivée par convolution binomiale reprend l'idée proposée par Worst et Smeulders, sur l'utilisation d'un noyau gaussien tronqué, pour donner une estimation des tangentes et de la courbure. Cette méthode est déjà communément utilisée dans la communauté de l'imagerie pour réduire l'intensité du bruit dans une image. Ils utilisent une méthode d'estimation des dérivées d'une fonction réelle par les différences finies et un noyau gaussien pour se prémunir du bruit qui peut apparaître sous les effets de la discrétisation, et pour étendre la méthode des différences finies à un voisinage plus large que celui initialement prévu dans la méthode.

**Définition 3.3.3** *Produit de convolution discret*

Soient  $F : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  et  $K : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  deux fonctions discrètes. On appelle le produit de convolution de  $F$  par  $K$  noté  $F * K$  la fonction :

$$F * K : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad (3.1)$$

$$a \mapsto \sum_{i \in \mathbb{Z}} F(a-i)K(i) \quad (3.2)$$

Le produit de convolution est simplement vu comme une moyenne pondérée en utilisant une fonction de poids en chaque point d'un voisinage. Dans leur article, la fonction de poids est un noyau gaussien tronqué.

**Définition 3.3.4** *Estimation des dérivées d'une fonction*

Soit  $\varphi$  une fonction discrète. Une estimation de la dérivée première de la fonction  $\varphi$  au point  $x$  est donnée par :

$$(\Delta_{2m-1} * \varphi)(x) = \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{i=-m+1}^m \binom{2m-1}{m-1+i} (\varphi(n+i+1) - \varphi(n-1+i)) \quad (3.3)$$

Une première preuve de la convergence multigrille est donnée dans leur article [MBF08]. En 2009, ils proposent une preuve de la convergence multigrille dans le cadre de courbe de classe  $\mathcal{C}^2$ .

**Théorème 3.3.5** [EM09] Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^2$  et  $f^{(2)}$  est bornée, soit  $\alpha \in ]0, 1]$ ,  $K \in \mathbb{R}_+^*$  et  $h \in \mathbb{R}_+^*$ . Supposons que  $\Gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  est telle que  $|h\Gamma(i) - f(hi)| \leq Kh^\alpha$ . Alors pour  $m = h^{(\alpha-2)/1.01}$  on a  $|(\Delta_{2m-1} * u)(n) - f'(nh)| \in O(h^{0.51(\alpha-0.01)/1.01})$

D'un point de vue théorique, la méthode par convolution binomiale possède une borne d'erreur en  $O(h^{0.51(\alpha-0.01)/1.01})$  donc plus faible selon  $\alpha$  que la méthode des segments



maximaux en  $O(h^{1/3})$ . D'autre part, la preuve de la convergence multigrille tient compte d'un certain degré de bruit  $\alpha$  lié à la discrétisation ce qui n'est pas le cas dans les méthodes de décomposition en arcs de cercle ou en segments maximaux. Cette méthode se généralise aux surfaces discrètes [FM08] avec un pseudo masque gaussien qui dépend du voisinage d'un point sur la surface.

**Définition 3.3.6** *Masque moyennneur sur une surface discrète [FM08]*

Soit  $\Sigma$  une surface discrète. Soit  $W_{\text{avg}} : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  le masque moyennneur sur  $\Sigma$ . Soit  $x, y$  deux surfels de  $\Sigma$ . On définit  $\delta_x(y)$  le nombre de surfels 0-adjacents à  $x$ . On pose alors :

$$W_{\text{avg}} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } y = x \\ \frac{1}{8} + \frac{\delta_x(y)}{32} & \text{si } y \in N_e(x) \\ \frac{1}{16\delta_x(y)} & \text{si } y \in N_v(x) - N_e(x) \\ 0 & \text{si } y \notin N_v(x) \end{cases}$$

avec  $N_v(x)$  le 0-voisinage et  $N_e(x)$  le 1-voisinage.

Contrairement au cas des courbes discrètes, on est obligé de définir des dérivées directionnelles sur la surface dans les directions  $u, v$ . Le noyau de convolution dépend dans ce cas, de deux noyaux directionnels :

$$D_u(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } y = N_0(x) \\ -\frac{1}{2} & \text{si } y = N_2(x) \end{cases}$$

$$D_v(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } y = N_1(x) \\ -\frac{1}{2} & \text{si } y = N_3(x) \end{cases}$$

qui dépendent de la numérotation des directions d'un surfel. De cette façon, ils définissent [FM08] un masque de filtrage sur une surface pour estimer les dérivées premières et secondes directionnelles et par suite de définir une estimation de la courbure et des normales. Remarquons que cette approche se complique dans le cadre des surfaces discrètes et que le choix du noyau de convolution est arbitraire. En pratique, ce noyau est efficace, ce qui ouvre la voie à son utilisation pour estimer les paramètres géométriques d'une surface.

### 3.3.4 Tangentes discrètes par moindres carrés

Proposé par Yi Ann, Cheng Shao, Xioliang Wang et Zhuohan Li [ASWL11], la méthode est une variante de la méthode précédente basée sur la convolution binomiale. Comme on le verra par la suite (Chapitre 5), nous déduirons de cette approche la méthode par convolution binomiale. Leur idée est d'utiliser la minimisation des moindres carrés pour chercher la droite qui passe au mieux par un ensemble de points discrets. Cette droite sera donc la tangente en un point donné  $p_k = (x_k, y_k)$  (voir Chapitre 5), pour plus de détails sur

la méthode de minimisation des moindres carrées). On montrera dans ce chapitre comment on déduit de la méthode de minimisation, la méthode par convolution.

Pour reprendre les définitions de leur article [ASWL11], on définit tout d'abord la fonction discrète  $y_i = f_d(x_i)$ ,  $x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Soit  $y = ax + b$  la droite passant par le point  $p_k$ . On cherche les caractéristiques  $a$  et  $b$  de cette droite qui minimise les distances avec le voisinage de  $p_k$ . On a donc l'équation :

$$\min f(a, b) = \sum_{j=k-m_1}^{k+m_1} (y_j - ax_j - b)^2 \quad (3.4)$$

La fonction de Lagrange est ainsi définie :

$$L(a, b, \lambda) = \sum_{j=k-m_1}^{k+m_1} (y_j - ax_j - b)^2 + \lambda(y_k - ax_k - b) \quad (3.5)$$

Les valeurs respectives de  $a$ ,  $b$  et  $\lambda$  se déduisent en résolvant le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial b} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

C'est la valeur de la pente de la droite, qui nous donne la valeur de la tangente au point  $p_k$ . En utilisant le système d'équations précédent on en déduit la valeur  $a$  :

$$a = \frac{\sum_{j=k-m_1}^{k+m_1} (x_j - x_k)(y_j - y_k)}{\sum_{j=k-m_1}^{k+m_1} (x_j - x_k)^2} \quad (3.6)$$

**Définition 3.3.7** *Yi Ann, Cheng Shao, Xioliang Wang et Zhuohan Li [ASWL11]*

Soit  $y_i = f_d(x_i)$ ,  $x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  une fonction discrète. Alors la valeur

$$f'_d(x_k) = \frac{\sum_{j=k-m_1}^{k+m_1} (x_j - x_k)(y_j - y_k)}{\sum_{j=k-m_1}^{k+m_1} (x_j - x_k)^2}$$

est appelée la dérivée discrète au point  $p_k$ . De la même façon, on définit la dérivée d'ordre  $n$  la valeur :

$$f_d^{(n)}(x_k) = \frac{\sum_{j=k-m_1}^{k+m_1} (x_j - x_k)(y_j^{(n)} - y_k^{(n)})}{\sum_{j=k-m_1}^{k+m_1} (x_j - x_k)^2}$$

Ils montrent que la définition de la tangente basée sur la minimisation des moindres carrés est d'erreur bornée quand le pas de la grille tends vers 0.

**Théorème 3.3.8** *Yi Ann, Cheng Shao, Xioliang Wang et Zhuohan Li [ASWL11] Soit  $y_i = f_d(x_i)$ ,  $x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  une fonction discrétisée d'une fonction réelle  $f$  deux fois différentiable. Alors :*

$$|f'_d(x_k) - f'(x_k)| < \max_{x_j \in \Lambda_j} \left\{ \left| \frac{f''(\epsilon_j)}{2} (x_j - x_k) \right| \right\}$$

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un état de l'art non exhaustif sur les méthodes de géométrie discrète pour estimer les tangentes et la courbure. Il apparait assez nettement deux approches, l'une basée sur la décomposition d'un contour en segments ou en arcs de cercle, et l'autre basée sur la convolution et le filtrage des données initiales. Dans les approches par segmentation, on obtient des informations géométriques sur le contour et la longueur des segments peut être utilisée pour donner une estimation de la longueur totale de la courbe, ou pour donner une estimation de la quantité de bruit dans le contour. Ce n'est pas le cas avec un filtre gaussien ou un filtre médian qui ne dépend pas de l'objet d'étude. En revanche, les filtres utilisés en analyse discrète, permettent de réduire l'intensité du bruit tout en donnant une estimation comparable aux méthodes de segmentation. En géométrie discrète, on utilise principalement des courbes ou des surfaces binaires, sans couleur ni niveau de gris. Or, pourquoi se restreindre à ce type de données ? En traitement du signal ou en analyse d'images, il serait intéressant de pouvoir appliquer des méthodes d'analyses discrètes pour extraire des informations géométriques d'une image obtenue par scanner, échographie, sonar... Notre idée est une approche qui combine les avantages de la segmentations des contours et du filtrage par convolution, c'est-à-dire un estimateur qui donne des informations géométriques locales comme pour la segmentation et applicable sur des ensembles de données purement binaires ou en niveau de gris. Le champs d'applications serait alors plus large, en combinant à la fois les approches purement géométrique par décomposition en primitives discrètes et les approches purement par convolution et ainsi, de filtrer des données en niveau de gris avec du bruit tout en donnant une caractéristique géométrique de l'ensemble.

# De l'équation de diffusion de la chaleur vers les processus discrets

Le plus court chemin d'un point à un autre est la ligne droite, à condition qu'ils soient bien l'un en face de l'autre.

PIERRE DAC

## Préambule

*Dans ce chapitre, nous présentons l'équation de diffusion de la chaleur ainsi que ses nombreuses applications dans l'étude de la géométrie des surfaces maillées. Nous proposerons une nouvelle définition d'un processus de diffusion discret qui peut se généraliser à tout objet de dimension quelconque.*

## Contents

4.1	introduction . . . . .	40
4.2	Équation de la chaleur . . . . .	41
4.3	Introduction aux processus Markoviens discrets . . . . .	45
4.4	Processus de diffusion discret . . . . .	49
4.5	Processus discret Flou . . . . .	59
4.6	Opérateur Laplacien discret . . . . .	69
4.7	Convergence vers l'opérateur usuel sur une surface quelconque . . . . .	82

## 4.1 introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons introduit des notions de géométrie discrète ainsi que les motivations d'établir une méthode d'estimation des paramètres géométriques d'une courbe ou d'une surface dans le cas où celle-ci serait avec du bruit. La convolution binomiale pour l'estimation des tangentes et de la courbure de fonctions discrètes est résistante par définition au bruit. Une généralisation de cette méthode a été proposée pour des surfaces en trois dimensions. Néanmoins, la généralisation à des surfaces de dimensions supérieures, le choix des poids du masque de convolution utilisé semble poser un problème de pertinence. Comment choisir les poids du masque de façon adaptée à la géométrie de la surface ?

Nous nous sommes penchés sur un équivalent des processus de diffusion, tel que ceux rencontrés dans la communauté des maillages. Que ce soit par segmentation, ou par convolution binomiale, les approches proposées sont basées sur des pixels ou sur des voxels. Or il existe toute une méthodologie basée sur la construction d'une surface triangulée. Sur ce type de structures de données, il existe des outils performants et rapides d'estimation des tangentes, de la courbure, des normales etc... Dans ce chapitre, on rappelle les méthodes basées sur les processus de diffusion, qui donnent des caractéristiques importantes sur la géométrie de la forme. L'étude des processus de diffusion de la chaleur a fait l'objet récemment d'une attention importante pour déduire des points résistants aux déformations ou pour détecter si deux surfaces sont isométriques, afin d'établir des correspondances entre elles. Les processus de diffusion sont liés aux contraintes de la géométrie de la surface et enregistrent localement les possibilités de propagations. Ces informations renseignent sur la courbure et surtout sur le type de surface sur laquelle on se trouve. L'étude de ces différentes méthodes nous a permis d'établir un processus de diffusion discret enregistrant localement la géométrie de la courbe. Ce processus possède les mêmes caractéristiques que les processus de diffusion de la communauté des maillages et permet une définition équivalente de ces outils sur des structures de pixels. On verra également que ce processus peut s'étendre à tout type de surface quelque soit la dimension de l'espace sur laquelle elle est définie.

Ce chapitre se présente donc de la façon suivante :

- Dans un premier temps nous introduirons l'un des processus de diffusion sur des surfaces réelles : la diffusion de la chaleur. Cela nous permettra de définir l'opérateur Laplacien et ces caractéristiques sur des objets réels.
- On propose un bref rappel des méthodes de discrétisations de l'opérateur Laplacien tel que ceux utilisés dans la communauté des maillages pour étudier les propriétés géométriques d'une surface triangulée.
- Afin de définir notre processus de diffusion discret, on présentera succinctement les propriétés et les définitions des processus Markovien. Ils nous serviront par la suite à définir un processus adaptatif à la géométrie d'une courbe ou d'une surface.
- Nous définirons un processus de diffusion discret et nous étudierons son compor-

tement asymptotiques sur les droites discrètes. Nous présenterons également une version étendue de ce processus appelé processus Fuzzy.

- Enfin nous justifierons ce processus de diffusion en établissant une équation de type de la chaleur. On définira une version discrète de l'opérateur Laplacien sous-jacente à ce processus. On proposera de redéfinir les classiques méthodes de la communauté des maillages dans le cadre de cette définition pour montrer sa pertinence.
- Enfin nous étudierons une généralisation de cet opérateur sur des réseaux de diamants et on discutera de la convergence de cet opérateur sur ce type de réseaux.

## 4.2 Équation de la chaleur

L'équation de diffusion de la chaleur a été introduite par Joseph Fourier en 1811 pour décrire les échanges de flux thermiques d'un objet physique. L'étude de la conductivité ou de la diffusion de la chaleur dans un objet, peut révéler des propriétés géométriques intéressantes. Plutôt que d'étudier l'ensemble des solutions de l'équation, on calcule les vecteurs propres et valeurs propres de l'opérateur de Laplace de la fonction étudiée. En fonction des échanges de chaleur locale, on détermine la régularité de la surface.

### 4.2.1 Cas de surfaces réelles

Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^3$ , de frontière  $\partial\Omega$  et  $T(x, t)$  un champ de température sur cette surface. On peut écrire l'équation de diffusion de la chaleur sur  $\Omega$  en tenant compte du coefficient de diffusivité thermique  $D$ , de la production volumique de chaleur propre  $P$ , de la masse volumique  $\rho$  et de la chaleur massique du matériau  $c$  :

$$\forall x \in \Omega, \quad \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = D\Delta T(x, t) + \frac{P}{\rho c}$$

Avec  $\Delta$  l'opérateur Laplacien. On définit  $T_0(x) = T(x, 0)$  la condition initiale. Pour compléter il suffit de préciser les conditions à la frontière du domaine. traditionnellement on parle des conditions de Dirichlet avec  $T(x, t) = 0$  si  $x \in \partial\Omega$ , ou des conditions des Neumann

$$\forall x \in \partial\Omega, \quad \frac{\partial T(x, t)}{\partial n} = \vec{n}(x) \cdot \vec{\nabla} T(x, t)$$

où  $\vec{\nabla}$  est l'opérateur gradient et  $\vec{n}(x)$  le vecteur normal en  $x$ . Les conditions de Neumann caractérisent des effets de rebonds à proximité de la frontière. Ce sont ces conditions que

l'on utilisera par la suite. Dans notre cas on préférera une version simplifiée de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = -\Delta T(x, t) \quad (4.1)$$

La fonction  $T(x, t)$  est la température sur  $\Omega$  au temps  $t$ . Les solutions de l'équation de la chaleur sont données par la fonction  $k_t(x, y)$  :

$$e^{t\Delta}f(x) = \int_{\Omega} k_t(x, y)f(y)dy \quad (4.2)$$

Si  $\Omega$  est un domaine compact, l'opérateur Laplacien admet une décomposition spectrale discrète  $\lambda = \{\lambda_0, \dots, \lambda_n\}$  tel que  $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  avec comme vecteurs propres associés  $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$

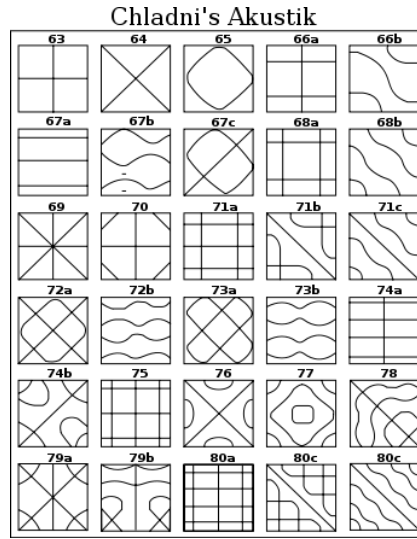
Le noyau de la chaleur dépend donc des vecteurs et valeurs propres de la décomposition du Laplacien :

$$k_t(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} e^{-t\lambda_i} \phi_i(x) \phi_i(y) \quad (4.3)$$

La diffusion sur un objet ou une surface est entièrement déterminée par les vecteurs propres du Laplacien. La diffusion est elle même contrainte par la géométrie de la surface. Pour une diffusion surfacique, elle sera par exemple dépendante des points de fortes courbures, où la diffusion sera plus lente ou au contraire des points de courbures négatives où la diffusion sera plus rapide. Un grand nombre de travaux récents utilisent le noyau de diffusion de la chaleur pour extraire des informations géométriques d'une surface discrète. Une définition discrète du Laplacien est nécessaire pour définir un équivalent du noyau de la chaleur sur des surfaces discrètes.

### 4.2.2 Application du Laplacien discret à l'étude géométrique

Le physicien Ernst Chladni publia un Traité d'acoustique en 1802 [Chl09]. Il présente dans ce livre des figures acoustiques obtenues en mettant en vibrations des plaques de cuivre saupoudrées de sable fin. En étudiant les accumulations de sable dans certains endroits de la plaque de verre, il remarqua les contours complexes que cela induisait. Quand les ondes se propagent sur la plaque de cuivre, certaines zones sont des noeuds de l'onde, donc le sable ne se déplace pas. En revanche sur les ventres, le sable va s'écarter pour s'accumuler vers les zones de faibles vibrations. Le sable dessine donc les contours des régions de vibrations (Figure 4.1).

FIGURE 4.1 : Figures Acoustiques de Chladni, *Traité d'acoustique* [Chl09]

En 1911, le physicien Peter Debye s'est intéressé au mode de vibration d'ondes sur la surface d'un tambour. Il a étudié les valeurs propres de l'équation de diffusion des ondes de Helmholtz :

$$\Delta f = \lambda f \quad (4.4)$$

où  $\Delta$  est l'opérateur Laplacien. Si on note  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  les coordonnées cartésiennes de  $\mathbb{R}^n$ , le Laplacien s'écrit sous la forme :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \quad (4.5)$$

L'objectif de l'étude des vecteurs propres était de savoir si en fonction de la décomposition spectrale du Laplacien, on pouvait «entendre» sa forme. La réponse à la question posée par Mark Kac en 1966 a été mise en évidence par C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert en 1992 [GWW92], en exhibant deux domaines dont les décompositions spectrales sont les mêmes mais les domaines ne sont pas isométriques.

Dans le domaine de l'inférence géométrique, N. Nadirashvili, Dzh. Tot, and D. Yakobson en 2001 [NTY01] étudient dans leurs articles les propriétés géométriques des vecteurs propres du Laplacien. En 2006, Bruno Levy [Lév06] introduit une étude similaire des vecteurs propres. Dans son papier, il argumente sur le fait que les vecteurs propres du Laplacien capturent des informations globales d'une surface triangulée. Il propose pour cela



plusieurs applications en reconstruction de surfaces, en traitement du signal, en segmentation et en paramétrisation de surfaces.

Raif M. Rustamov [Rus07] en 2007, établit que des vecteurs propres du Laplacien détectent des parties invariantes par déformation d'une surface. Il définit une fonction qu'il appelle GPS. Le GPS au point  $p$  dépend à la fois des vecteurs propres comme pour les études présentées par Bruno Levy, mais aussi des valeurs propres du Laplacien :

$$\text{GPS}(P) = \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \phi_1(p), \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \phi_2(p), \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \phi_n(p), \dots \right) \quad (4.6)$$

L'idée est de proposer une caractérisation de chaque point de la surface à l'aide des informations capturées par les valeurs et les vecteurs propres du Laplacien. Le GPS ainsi défini est un invariant isométrique permettant de repérer les zones à une déformation près.

Simultanément en 2009, Katarzyna Gebal, J. Andreas Bærentzen, Henrik Aanæs, et Rasmus Larsen [GBAL09] et Jian Sun, Maks Ovsjanikov, and Leonidas Guibas [SOG09] étudient l'équation de diffusion de la chaleur pour déterminer la géométrie d'une surface. Ils définissent le noyau de la chaleur comme caractérisation locale de la surface. Cette méthode appelée HKS, repose sur les transferts de chaleur d'un point vers son voisinage pendant un certain temps  $t$  :

$$\text{HKS}(p, t) = k_t(p, p) \quad (4.7)$$

Les pertes de chaleur d'un point vers son voisinage permettent de détecter les points de fortes courbures et les points de courbures négatives. D'autres part, le HKS établit un couplage avec des points possédant la même signature thermique. De cette façon ils détectent le nombre de doigts d'une main triangulée ou le nombre de pattes d'un dragon.

Le HKS est relié aux distances spectrales sur une surface. En tant que généralisation de la méthode HKS, Michael M. Bronstein and Alexander M. Bronstein [BB11] en 2011, utilisent les distances spectrales pour détecter des similitudes dans les surfaces triangulées.

$$d^2(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} K^2(\lambda_i) (\phi_i(x) - \phi_i(y))^2 \quad (4.8)$$

où  $K(\lambda)$  représente la fonction de transfert d'un filtre passe bande. Dans le cas du GPS,  $K(\lambda) = \lambda^{-\frac{1}{2}}$

Dans les travaux présentés ci-dessus, les méthodes donnent des caractéristiques géométriques et topologiques intéressantes des surfaces triangulées. Nous proposons par la suite, un processus de diffusion de la chaleur sur lequel repose la plupart de ces méthodes, en temps discret, et qui donne des caractérisations similaires à celles des surfaces maillées.

Les méthodes par convolution, proposent des masques pseudo-gaussiens pour l'étude des tangentes et des normales de courbes ou de surfaces  $k$ -connexe. Notre idée est d'utiliser la diffusion sur des objets  $k$ -connexe ce qui donnerait une information locale de la géométrie, plus adapté pour réduire l'intensité du bruit et surtout qui tiendrait compte de la géométrie et de la courbure pour en donner une estimation plus précise. Ce processus de diffusion, de la même façon que précédemment introduit, permettra la définition d'un opérateur Laplacien discret, dont les vecteurs propres et les valeurs propres donneront des propriétés intéressantes de la géométrie de la forme.

Nous proposons un bref rappel des processus Markovien. Dans cette section, on définira les outils statistiques des processus stochastiques qui nous serviront par la suite à définir les processus de diffusion discret.

### 4.3 Introduction aux processus Markoviens discrets

Dans cette partie, nous proposons un peu de théorie basique sur les processus Markovien qui sont utilisés pour modéliser des comportements dynamiques aléatoires. Ces outils nous serviront par la suite à définir un processus de diffusion sur des surfaces discrètes. Les processus Markoviens peuvent se généraliser au temps continu mais pour notre étude nous nous limiterons aux cas discrets.  $\mathcal{E}$  représentera dans toute la suite de cette section un ensemble fini ou dénombrable.

#### 4.3.1 Définitions

##### **Définition 4.3.1** *Chaines de Markov en temps discret*

Soit  $\mathcal{E}$  un ensemble fini ou dénombrable. Un processus  $\{X(n), n \in \mathbb{N}\}$  est une chaîne de Markov en temps discret si et seulement si  $X(n) \in \mathcal{E}$  pour tout  $n$  et pour tout  $t \in \mathbb{N}$  et pour tout  $(j_0, j_1, \dots, j_{t+1})$  éléments de  $\mathcal{E}$  :

$$\mathbb{P}(X(t+1) = j_{t+1} | X(t) = j_t, \dots, X(0) = j_0) = \mathbb{P}(X(t+1) = j_{t+1} | X(t) = j_t) \quad (4.9)$$

La propriété (4.9) traduit le fait qu'un processus markovien est sans mémoire. La probabilité de passage vers un état  $j_{t+1}$  ne dépend pas des autres états atteints par le processus, mais uniquement du passé immédiat de celui-ci.

##### **Définition 4.3.2** *Homogénéité*

On dit qu'une chaîne de Markov est homogène si pour tout  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , il existe un nombre  $P_{i,j}$  tel que :

$$\mathbb{P}(X(t+1) = j | X(t) = i) = P_{i,j} \quad (4.10)$$

pour toute valeur de  $t$

Un processus est dit homogène si le calcul des transitions d'un état  $i$  vers un état  $j$  ne dépend pas du temps. Dans la suite, nous ne considérerons que les processus homogènes.

### 4.3.2 Chaines de Markov sur un ensemble fini d'états

Dans l'introduction de ce chapitre,  $\mathcal{E}$  est un ensemble fini ou dénombrable. Si l'on suppose que  $\mathcal{E}$  est un ensemble fini, on représentera la chaîne de Markov sous la forme d'une matrice, ou sur chaque ligne et sur chaque colonne sont définies les probabilités de transition d'un état vers un autre.

On appelle  $P$  la matrice de transition dont les composantes  $P_{i,j}$  avec  $(i,j) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ .

#### Définition 4.3.3 Matrice stochastique

Une matrice est dite stochastique si c'est une matrice carrée dont les entrées sont toutes positives ou nulles à valeur dans  $\mathbb{R}$  et dont la somme sur chaque ligne est égale à 1.

Une des manières classiques de représentations des chaînes de Markov en temps discret, est la représentation sous forme de graphe. A partir de la matrice de transition, on définit un graphe dont les sommets sont les éléments de  $\mathcal{E}$  et on ajoute une arête orientée pour toute valeur non nulle de la matrice de transition. On obtient un graphe orienté (Figure 4.2) dont les poids sur les arêtes sont données par les entrées de la matrice de transition

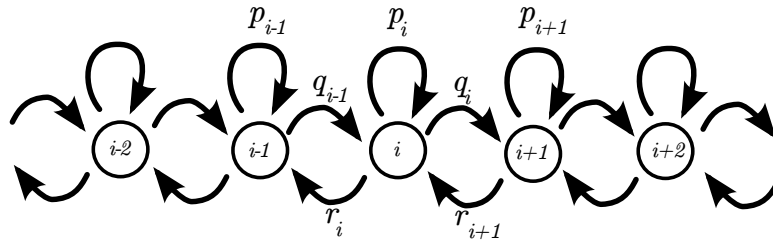


FIGURE 4.2 : Représentation d'une chaîne de Markov sous forme de graphe sur  $\mathbb{Z}$

L'utilité d'une telle représentation est de pouvoir utiliser des notions importantes de la théorie des graphes.

#### Définition 4.3.4 Graphe fortement connexe

Un graphe orienté est dit fortement connexe si pour tout couple de sommets  $(i,j)$  il existe un chemin reliant  $i$  à  $j$ .

#### Définition 4.3.5 Irréductibilité

On dira qu'une matrice est irréductible si son graphe associé est fortement connexe.

Une autre façon de voir l'irréductibilité d'une matrice est que  $\forall (i, j) \in \mathcal{E}, \exists n$  tel que  $P_{i,j}^n > 0$  et  $\exists m$  tel que  $P_{j,i}^m > 0$ , c'est-à-dire que deux états sont atteignables à partir d'un certain rang  $r = \max(n, m)$ .

**Définition 4.3.6** *Périodicité*

Pour un sommet  $i$  du graphe, soit  $d(i)$  le pgcd de toutes les longueurs des cycles passant par  $i$ . Le sommet  $i$  est dit périodique de période  $d(i)$ . Soit  $d$  le ppcm des  $d(i)$ . Si  $d > 1$  on dira que le graphe est périodique de période  $d$ . Si  $d = 1$  alors le graphe est dit apériodique.

**Définition 4.3.7** *Matrice apériodique*

Une matrice de transition est dite apériodique si son graphe associé est apériodique.

**Théorème 4.3.8** *Un processus markovien dont la matrice de transition est irréductible et apériodique est dit ergodique, c'est à dire que la moyenne temporelle le long d'un chemin sur le graphe coïncide pour de grands temps avec la moyenne spatiale de l'ensemble des chemins.*

### 4.3.3 Probabilités de transition

Le premier problème auquel on est confronté est le calcul des probabilités de transition d'un état  $i$  vers un état  $j$  en  $n$  étapes. Notons

$$p(i, j, n) = \mathbb{P}(X(n) = j | X(0) = i)$$

la probabilité d'aller de l'état  $i$  vers l'état  $j$  en  $n$  étapes. Notons la matrice associée  $P(n)$ , la matrice dont les entrées sont données par  $(p(i, j, n))_{(i, j) \in \mathcal{E}^2}$ . On a alors le résultat suivant :

**Théorème 4.3.9** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$P(n) = P(1)^n \quad (4.11)$$

La façon de traduire ce théorème est de voir les probabilités de transition sous forme de chemins dans un graphe. Soit  $\mathcal{G}$  le graphe associé à la matrice de transition  $P$ . On regarde dans ce graphe tous les chemins de longueurs  $n$ ,  $i = i_0, i_1, \dots, i_n = j$  pondérés par les valeurs de la matrice  $P(i_k, i_{k+1})$ . On a alors que la probabilité d'aller de  $i$  vers  $j$  en  $n$  étapes est la somme de tous les poids sur tous les chemins de longueurs  $n$  allant de  $i$  vers  $j$ .

Introduisons maintenant la distribution de probabilité d'une chaîne de Markov. Soit  $\pi_0(j)$  la distribution initiale du processus démarrant au point  $j$  :

$$\pi_0(j) = \mathbb{P}(X(0) = j) \quad j \in \mathcal{E} \quad (4.12)$$

On cherche à calculer de la même façon la distribution de probabilité au bout de  $n$  étapes :

$$\pi_n(j) = \mathbb{P}(X(n) = j) \quad \forall j \in \mathcal{E} \quad (4.13)$$

**Théorème 4.3.10** Pour tout  $j \in \mathcal{E}$  :

$$\pi_n = \pi_0 P^n \quad (4.14)$$

#### 4.3.4 Décomposition spectrale

Par la suite, nous décomposons la matrice de transition pour le calcul des puissances successives de la matrice de transition, ou pour étudier les vecteurs propres de la matrice.

**Définition 4.3.11** Valeur propre

Soit  $P$  une matrice carrée,  $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ . Le nombre complexe  $\lambda$  est une valeur propre de  $P$  s'il existe un vecteur  $x \neq 0$  tel que  $Px = \lambda x$ . On appelle  $x$  le vecteur propre associé à  $\lambda$ .

**Définition 4.3.12** Spectre de  $P$  et rayon spectral

Soit  $P$  une matrice carrée,  $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ , on appelle spectre de  $P$ , noté  $\text{sp}(P)$ , l'ensemble de toutes les valeurs propres de  $P$ . On appelle rayon spectral l'ensemble :

$$\rho(P) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \text{sp}(P)\} \quad (4.15)$$

Dans la suite on notera le spectre d'une matrice  $P$  :

$$\text{sp}(P) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \quad (4.16)$$

avec  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$

Dans le cas de matrices stochastiques, toutes les entrées sont positives ou nulles. Elles ont une propriété intéressante puisque en général le rayon spectral est relié à l'une des valeurs propres. On appelle cette valeur propre la valeur propre de Perron-Frobenius :

**Théorème 4.3.13** Perron-Frobenius [Bil99]

Soit  $P$  une matrice carrée positive et irréductible. Alors il existe une valeur propre  $r$  qui a les propriétés suivantes :

- $r > 0$
- $r$  est associé à un vecteur propre à gauche  $g$  et un vecteur propre à droite  $d$  strictement positif
- pour toute valeur propre  $\lambda \in \text{sp}(P)$ , on a  $|\lambda| \leq r$
- L'espace propre associé à  $r$  est de dimension 1
- $r$  est une racine simple du polynôme caractéristique de  $P$

**Théorème 4.3.14** Spectre de matrice stochastique

Soit  $P$  une matrice stochastique.

- (i) Le rayon spectral de  $P$  est 1 et c'est une valeur propre

- (ii) Si  $P$  est de plus irréductible, alors il existe un unique vecteur  $\pi$  tel que  $\pi P = \pi$  (vecteur de probabilité stationnaire)
- (iii) Si  $P$  est apériodique et irréductible, alors pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $P$  différente de 1 est telle que  $|\lambda| < 1$

La décomposition du spectre de la matrice stochastique d'un processus markovien, nous servira par la suite à caractériser des directions propres de diffusion. Dans la section suivante, nous étudierons un processus markovien que nous avons défini sur des ensembles discrets. L'objectif est de proposer un modèle de diffusion de type markovien sur des courbes ou des surfaces discrètes pour étudier sa géométrie.

## 4.4 Processus de diffusion discret

Un processus markovien peut modéliser un homme saoul se déplaçant sur un ensemble d'états. Ce marcheur est saoul, pour modéliser le fait que ces déplacements sont aléatoires, myope pour ne voir que les états qui sont les plus proches de lui et sans mémoire, la propriété de Markov. C'est pourquoi dans la littérature on appelle les chaînes de Markov des marches aléatoires. Cette analogie est intéressante et plus visuelle pour comprendre la définition du processus que l'on va définir par la suite. Une chaîne de Markov sera donc vue comme les déplacements d'un marcheur sur un ensemble d'états.

### 4.4.1 Définitions et propriétés

Tout d'abord définissons le processus Markovien. Regardons tout d'abord le type de données que l'on souhaite traiter. Le premier constat que l'on peut faire par rapport à la notion de voisinage défini dans le Chapitre 2, est que les courbes 0-connexes sont les plus fines possibles sans être déconnectées, ce qui est nécessaire pour notre processus de diffusion. Soit un marcheur se déplaçant sur un objet  $\Sigma$  0-connexe de dimension  $n$ . Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble de tous les voxels de  $\Sigma$ .

#### Définition 4.4.1 Chaîne de Markov adaptative

Soit  $\Sigma \subset \mathbb{Z}^n$  un ensemble de voxels 0-connexe. On définit sur  $\Sigma$  la chaîne de Markov en temps discret dont les états  $\mathcal{E}$  sont les voxels de  $\Sigma$  et dont les transitions entre deux voxels voisins sont contraintes par

- Probabilité  $\frac{1}{2^n}$  d'aller du centre du voxels vers l'un de ses coins
- Équiprobable répartition des marcheurs des coins vers les voxels incidents.

Nous proposons deux exemples de cette définition sur des courbes discrètes. Le premier exemple Figure 4.3, permet de comprendre comment à partir d'un ensemble de pixels on construit les probabilités de transitions pixel à pixel. Figure 4.3(a), on place 24 marcheurs sur un des pixels de l'ensemble. Comme on est sur une courbe avec des pixels, il y

a quatre coins, on répartit donc les 24 marcheurs sur les quatre coins de l'ensemble. On a donc Figure 4.3(b), 6 marcheurs en chaque coin. On efface la mémoire des marcheurs donc ils se répartissent de façon équiprobable sur tous les pixels qui se trouvent autour d'eux. On a donc finalement Figure 4.3(c) la répartition finale.

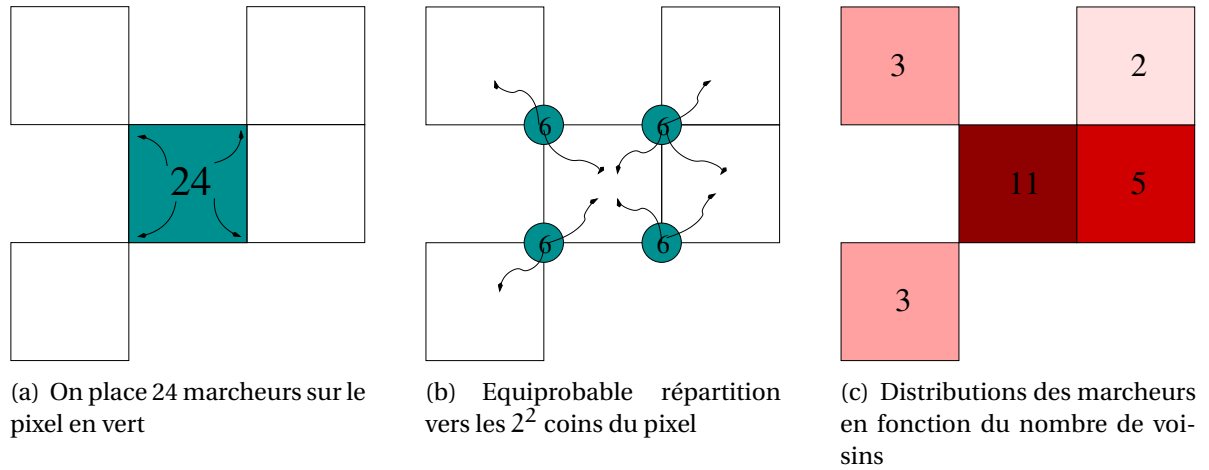


FIGURE 4.3 : Exemple de distribution de 24 marcheurs sur un contours discret. On décompose le processus en deux parties : tout d'abord répartition sur les coins du pixel de départ, puis répartition sur les pixels alentours.

Nous proposons un autre exemple Figure 4.4. On construit le graphe d'adjacence du processus markovien précédemment défini. Remarquons que cette définition tient compte du voisinage de chaque pixel, donc on aura automatiquement une arête sortante et une arête rentrante, chaque pixel étant voisin d'un autre. Par construction des probabilités de transition pixel à pixel, on efface la mémoire du marcheur uniquement après son positionnement sur le coin du pixel. Il ne se rappellera plus du pixel d'où il vient. Il aura donc autant de chance de revenir sur sa position initiale et de se déplacer vers l'un des pixels de son voisinage. On aura pour chacun des pixels une arête qui reviendra sur elle-même avec un poids non nul. Enfin on propose Figure 4.4(b) une répartition des marcheurs après deux itérations, sachant que l'on part du pixel en vert. Pour obtenir les poids du masque final, on multiplie simplement les valeurs par 128, pour obtenir des coefficients entiers en chaque pixel.

Le processus de diffusion ainsi défini, faisons tout d'abord quelques remarques. On notera la matrice de transition de ce processus  $A_s$ , pour «adaptatif». Il est clair que ce processus dépend du voisinage de chacun des pixels. En fonction du type de courbe ou de la surface étudiée, ce processus n'aura pas les mêmes propriétés de diffusion. Il s'adapte donc naturellement à la géométrie de l'objet. Il existe un lien très fort entre la matrice  $A_s$  et les matrices classiques d'adjacences.

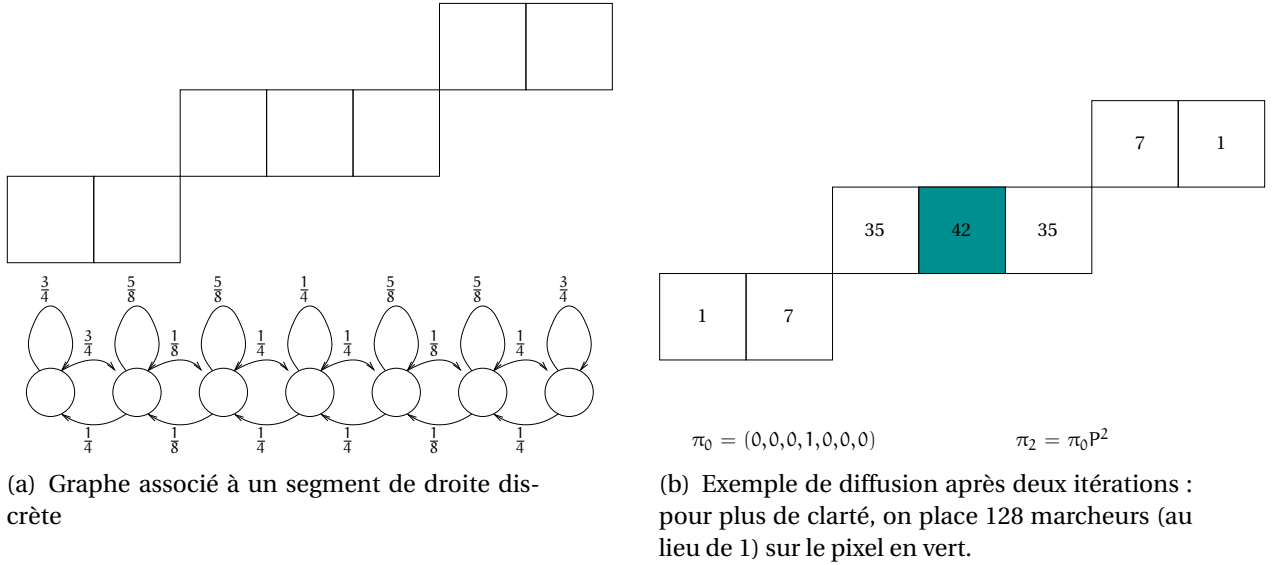


FIGURE 4.4 : Exemple de diffusion sur un segment de droite de pente  $\frac{3}{9}$ . On construit le graphe d'adjacence dont les arêtes sont pondérées par les valeurs de la diffusion. Ensuite Figure 4.4(b) on démarre la diffusion en plaçant un marcheur sur le pixel en vert (vecteur  $\pi_0$ ). Enfin on calcule par la formule donnée Théorème 4.3.10, la valeur finale de la répartition des marcheurs. Le résultat final est multiplié par 128, pour avoir des entiers en chaque pixel de la courbe.

#### Définition 4.4.2 Matrice d'adjacence

Soit  $\mathcal{G} = (V, E)$  un graphe orienté dont  $V$  représente les sommets de  $\mathcal{G}$  et  $E$  les arêtes de ce graphes. On appelle  $A$  la matrice d'adjacence, la matrice dont les entrées sont définies de la façon suivantes :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{S'il existe une arête de } i \text{ vers } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La matrice  $A_s$  n'est qu'une version pondérée de la matrice classique d'adjacence. On peut donc dire que ce processus caractérise la valeur d'un voisin par rapport à un autre. Ainsi on espère détecter de façon pertinente, les voisins qui ont le plus d'importance dans un contour, notamment repérer les pixels qui sont du bruit ou pas.

**Théorème 4.4.3** Soit  $\Sigma$  une courbe  $k$ -connexe, et soit  $A_s$  la matrice stochastique associée. On a alors les propriétés suivantes :

- (i) le processus est homogène
- (ii)  $A_s$  est irréductible et apériodique
- (iii)  $A_s$  est ergodique



**Démonstration :** La propriété (i) est immédiate. Par définition du processus, la probabilité d'aller du point  $i$  vers le point  $j$  ne dépend que de la composition du voisinage du point  $i$ . Elle est donc indépendante du temps.

(ii) La courbe  $\Sigma$  est  $k$ -connexe c'est-à-dire que chaque pixel possède au moins un coin en commun avec un autre pixel de la courbe. Soit  $i, j \in \Sigma$  et soit  $c = \{c_1, c_2, \dots, c_t\}$  un chemin qui va de  $i$  à  $j$ . On a pour  $X$  le processus stochastique associé à  $A_s$  :

$\forall r \in c, \mathbb{P}(X_{n+1} = c_r | X_n = c_{r-1}) > 0$  du fait que la courbe soit  $k$ -connexe, donc pour  $n$  fixé,

$$\sum_{i=1}^t \mathbb{P}(X_{n+1} = c_i | X_n = c_{i-1}) > 0$$

donc  $\exists N$  avec  $N > t$  tel que  $A_s(i, j)^N > 0$ .

L'apériodicité se déduit immédiatement de la définition. Les transitions du centre du voxel vers les coins et des coins vers les voxels adjacents, se font sans mémoire. Donc la probabilité de rester sur place est non nulle. Chaque pixel a donc une période de 1 au moins, donc le processus est apériodique.

(iii) La matrice est stochastique apériodique et irréductible par (ii), elle est donc ergodique. □

#### 4.4.2 Diffusion sur des droites discrètes.

On s'intéresse naturellement à la diffusion du processus précédent sur des droites discrètes. Les droites discrètes sont les objets les plus simples que l'on rencontre. Il est donc important de voir le comportement de ce processus sur ces objets.

##### Propriété 4.4.1 Distribution sur $\mathbb{Z}$

Soit  $A_s$  la matrice stochastique du processus de diffusion sur  $\mathbb{Z}$ . Soit  $x, y \in \mathbb{Z}$ , on a alors que la matrice de diffusion et ses puissances sont décrites par des nombres binomiaux :

$$A_s^n(x, y) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{|x-y|} \quad (4.17)$$

**Démonstration :** La preuve se fait par récurrence. Pour  $n = 1$ , on regarde les voisins à une distance de 1 d'un pixel  $x$ . Ce pixel a deux coins en commun avec chacun des ces voisins (Figure 4.5(a) et Figure 4.5(b)). On a donc les probabilités de  $\frac{1}{4}$  d'aller à droite ou à gauche de façon symétrique et une probabilité de  $\frac{1}{2}$  de rester en place.

$$A_s^1(x, y) = \frac{1}{2^2} \binom{2}{|x-y|} \quad (4.18)$$

Supposons la propriété vraie au rang  $n - 1$

$$A_s^{n-1}(x, y) = \frac{1}{2^{2(n-1)}} \binom{2(n-1)}{|x-y|}$$

Avant de démontrer la propriété au rang  $n$ , on définit un outil pour la suite de la preuve.

**Définition 4.4.4** *Produit de Convolution*

On définit le produit de convolution de deux fonctions réelles ou complexes  $f$  par  $g$  (noté  $*$ ) comme :

$$(f * g)(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(n-m)g(m) \quad (4.19)$$

Le produit de convolution est une moyenne pondérée. Quand  $f$  est à support fini, on parlera de masque de convolution.

Dans notre cas on cherche à calculer  $A_s^n$ , c'est-à-dire calculer la diffusion à un rang de plus que  $A_s^{n-1}$ . Notons  $f = \frac{1}{2^2} A_s^1(x)$  et  $g = \frac{1}{2^{2n-2}} A_s^{n-1}(x)$ , on a alors (Figure 4.5(c)) :

$$A_s^n(x, y) = (f * g)(y) \quad (4.20)$$

$$= \sum_{k=1}^n f(x, k) g(x, x-k) \quad (4.21)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^2} A_s^1(x, k) \frac{1}{2^{2n-2}} A_s^{n-1}(x, x-k) \quad (4.22)$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^2} \binom{2}{k} \frac{1}{2^{2(n-1)}} \binom{2(n-1)}{|x-y|-k} \quad (4.23)$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{|x-y|} \quad (4.24)$$

□

Bien sûr, on peut généraliser cette propriété à  $\mathbb{Z}^n$  avec une preuve similaire. En géométrie euclidienne, les droites  $y = 0$ ,  $x = 0$  ou n'importe quelle autre droite du plan est parfaitement équivalente. En géométrie discrète, comme on a pu le voir au Chapitre 2, la définition des droites discrètes est telle qu'en fonction de la pente de la droite on verra apparaître des paliers, qui viennent rectifier sa direction. il n'existe que trois droites qui échappent à ces paliers, la droite  $y = x$  et les droites  $x = 0$  et  $y = 0$ . La propriété 4.4.4, nous indique que le processus de diffusion est régulier sur  $\mathbb{Z}$  donc sur les droites  $x = 0$  et  $y = 0$ . On s'intéresse donc au comportement du processus sur les autres droites discrètes, à savoir le comportement de la distribution des poids sur n'importe quelle droite quelque soit leur pente (Voir exemples de diffusion Figure 4.4(b) et Figure 4.7(b) pour différente taille de masques). On remarque que sur une droite discrète le nombre de configurations possibles dans un voisinage est restreint.

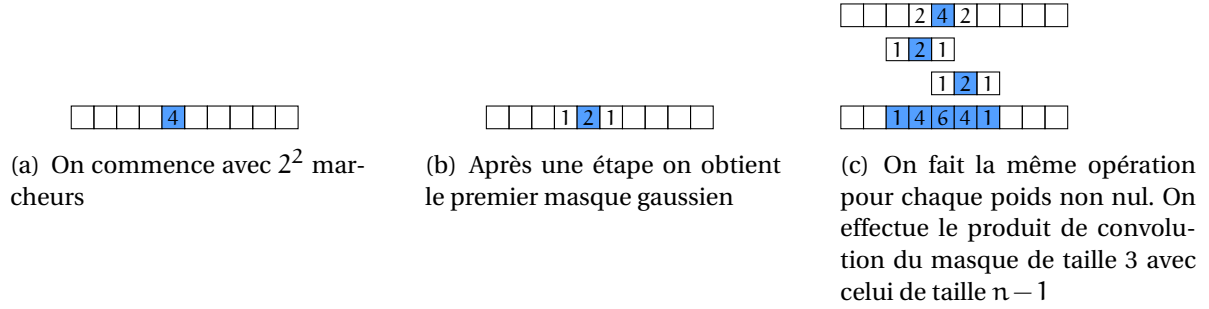


FIGURE 4.5 : Illustration de la Propriété 4.4.4. Les poids de la diffusion sont donnés par les coefficients binomiaux.

**Définition 4.4.5** *Classes d'équivalence*

On attribue à un pixel  $i$  la paire de ces adjacences avec ses voisins de droite et de gauche. On note  $[i]$  sa classe d'équivalence induite par sa paire d'adjacence.

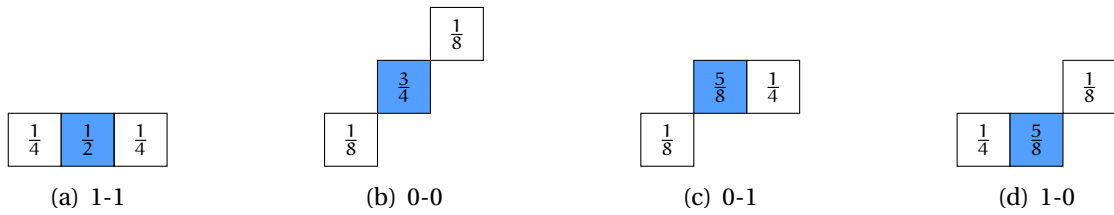


FIGURE 4.6 : Sur  $\mathbb{Z}^2$  les droites discrètes sont composées uniquement de quatre classes d'équivalence.

Sur  $\mathbb{Z}^2$  les droites discrètes ne sont composées que de quatre classes d'équivalence (Figure 4.6). D'après ce qui précède, partant d'un pixel  $i$  la diffusion sera donnée par la combinaison de ces quatre masques.

**Définition 4.4.6** *Convergence en Loi*

Soit  $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité et  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires définies sur  $\Omega$ . On dit que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers la variable aléatoire  $X$  et on note  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  si :

$$\forall x_0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n < x_0) = \mathbb{P}(X < x_0)$$

**Théorème 4.4.7** Soit  $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$  une droite arithmétique, et soit  $A_s$  sa matrice stochastique de diffusion. Alors  $\frac{1}{\sqrt{2m+1}} A_s^m(0) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$ .

**Démonstration :**

Dans la preuve de convergence sur  $\mathbb{Z}$ , (Preuve.4.4.2), quelque soit la position du marcheur, la probabilité de déplacement sur la droite ou sur la gauche sont égales, de même que la probabilité de rester sur place.

Dans le cas d'une droite  $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$  quelconque, les déplacements dans le temps dépendent de la position sur la droite. Soit  $X_t \in \{-1, 0, +1\}$  la variable aléatoire qui dirige les déplacements au temps  $t$ . Si le déplacement s'effectue vers la gauche,  $X_t = -1$ , si le déplacement s'effectue vers la droite  $X_t = +1$  et enfin si on reste en place  $X_t = 0$ .

D'après la Définition 4.4.5, on sait que la variable  $X_t$  n'a pas les mêmes probabilités pour chaque pixel quelque soit le temps. La variable dépend de chaque classe d'équivalence. L'évolution de la position dans le temps au temps  $t$ , noté  $P_t$  dépend donc de la position au temps précédent et du mouvement effectué :

$$P_t = P_{t-1} + X_{P_{t-1}} \quad (4.25)$$

Le problème qui apparait est que  $P_t$  dépend du temps :

$$\frac{1}{T} P_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t \quad (4.26)$$

D'après le Théorème 4.4.3, on sait que le processus est ergodique, c'est-à-dire que pour un temps assez grand, la moyenne dans le temps le long d'une trajectoire allant jusqu'au temps  $T$  est égale à la moyenne spatiale à un temps donné  $T$ . En fonction de la position  $i$  on peut alors trouver un équivalent de l'équation (4.26) :

$$\frac{1}{T} P_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t \quad (4.27)$$

$$\simeq_{T \rightarrow \infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(P_T = i) X_i \quad (4.28)$$

où  $\mathbb{P}(P_T = i)$  représente la probabilité pour un marcheur de se trouver au temps  $T$  sur un pixel  $i$ . La variable aléatoire de transition  $X_i$  dépend de la position du pixel  $i$  seulement au travers de sa classe d'équivalence  $[i]$ .

Notons  $\lambda_{[i]}$  la proportion de pixels dans la classe d'équivalence  $[i]$ .

Définissons maintenant les variables aléatoires  $L_t$  qui sont égales à 1 si le marcheur va à gauche et 0 sinon. De façon identique définissons  $R_t$  pour les déplacements à droite.

On a  $X_t = R_t - L_t$ . On applique le théorème d'ergodicité sur chacune des variables aléatoires  $R_t$  et  $L_t$  :

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t \simeq_{T \rightarrow \infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(P_T = i) R_i = \sum_{[i]} \left( \sum_{i \in [i]} \mathbb{P}(P_T = i) \right) R_{[i]} \quad (4.29)$$

$$\simeq_{T \rightarrow \infty} \sum_{[i]} \lambda_{[i]} R_{[i]} \quad (4.30)$$

Où  $\sum_{[i]} \lambda_{[i]} R_{[i]}$  est la somme sur l'ensemble des classes d'équivalences. Dans le cas d'une droite discrète naïve, on effectue la somme sur les trois classes d'équivalence (voir Définition 4.4.5). Et de façon identique :

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(P_T = i) L_i \simeq_{T \rightarrow \infty} \sum_{[i]} \lambda_{[i]} L_{[i]} \quad (4.31)$$

On construit alors une suite de variables aléatoires  $X'_k$  avec  $\lambda_{[i]}$  la proportion de pixels dans la classe  $[i]$  indépendante du temps :

$$X'_k = \sum_{[i]} \lambda_{[i]} (R_{[i]} - L_{[i]}) \quad (4.32)$$

$$= \sum_{[i]} \lambda_{[i]} X_{[i]} \quad (4.33)$$

où  $X'_k$  indépendant de  $k$  d'écart type  $\sigma$  et de moyenne  $\mu = 0$ .

**Remarque.** On verra par la suite que l'écart type  $\sigma$  se calcule explicitement (voir Remarque 4.4.2).

Soit  $Z_k$  la position normalisée au temps  $T$  en partant de l'origine. On a :

$$Z_T = \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \sum_{k=1}^T X'_k \quad (4.34)$$

Nous sommes dans les conditions du Théorème central limite que nous rappelons ici.

#### **Théorème 4.4.8** *Théorème Central Limite*

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité suivant la même loi  $D$  et indépendantes, d'écart type  $\sigma$  et d'espérance  $\mu$ . Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}, \quad Z_n = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\overline{X}_n - \mu)$$

Alors la loi de  $Z_n$  converge en loi vers la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(a < Z_n < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

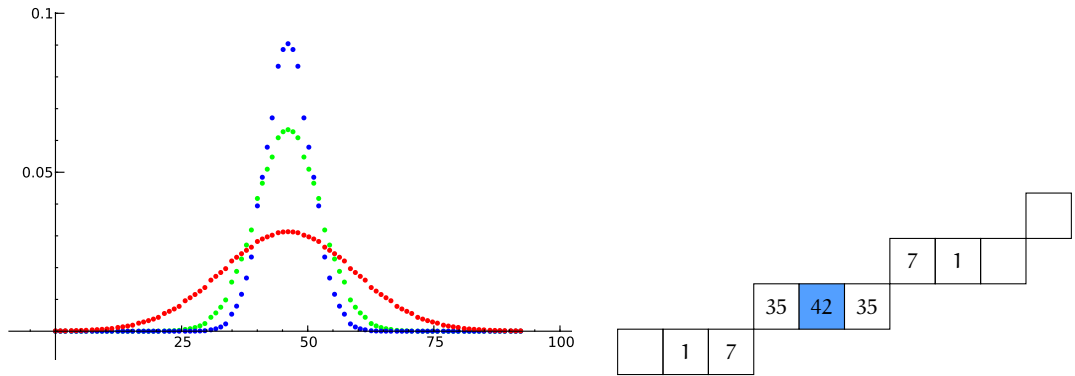
D'après la construction de la suite de variables  $Z_T$ , elles sont indépendantes, et suivent toutes la même loi, d'après le Théorème Central limite,  $\frac{1}{T} \sum_{k=1}^T X'_k$  converge en loi vers une loi normale c'est à dire :

$$Z_T \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

ce qui s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{2m+1}} A_s^m(0) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

□



(a) Distribution statistique des poids pour un masque de taille 101, 201 et 801 calculé sur la droite discrète de pente  $\frac{2}{9}$

(b) Exemple de distribution de poids sur la droite de pente  $\frac{1}{3}$  avec 128 marcheurs.

FIGURE 4.7 : Exemples de diffusion de marcheurs sur des droites discrètes.

### Remarque.

La preuve de ce théorème est constructive, à partir de la proportion du nombre de classes d'équivalence sur une droite discrète donnée, on peut retrouver la valeur exacte de l'écart type en fonction de sa pente.

Si l'on note  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , la proportion de chaque classe d'équivalence respectivement 1-1, 1-0, 0-1, 0-0, la variable aléatoire  $X'_i$  signifie qu'à partir de la position dans l'une des classes  $[i]$ , on ira sur la droite avec une probabilité  $p_1$  dans une classe d'équivalence  $[k]$ , à droite avec une probabilité  $p_2$  et de rester dans la même classe avec une probabilité  $p_3$

D'après ce que l'on a pu voir dans la preuve, cette suite de variables aléatoires ne dépend pas de la position du marcheur sur la droite au temps  $t$ , contrairement à la première loi  $X_i$ . Donc on peut calculer à partir de chaque proportion les probabilités  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_3$  et donc par suite l'écart type  $\sigma$  de la variable  $X'_i$ . De cette façon, toujours d'après le Théorème Central Limite, l'écart type de la somme  $\sum_i X'_i$  est simplement  $\sigma\sqrt{n}$ .

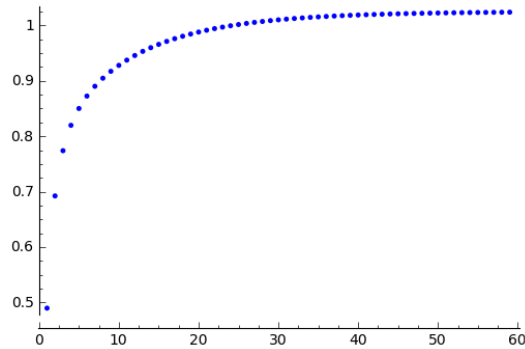
**Définition 4.4.9** *Écart type réel*

Soit  $\mathcal{D}(\alpha, b, \omega, \max(|\alpha|, |b|))$  une droite discrète et  $A_s^m$  la matrice stochastique de transition associé à  $\mathcal{D}$ . On appelle écart type  $\sigma$  d'une distribution centrée au pixel  $i$  la valeur :

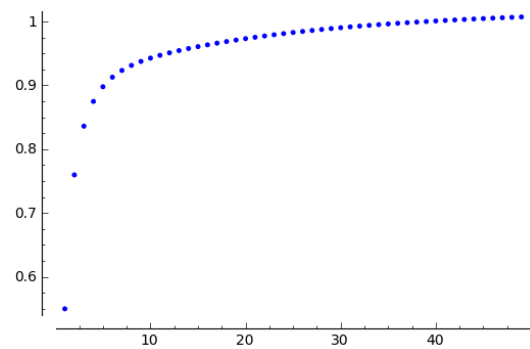
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2m+1} \sum_{j=1}^{2m+1} (A_s^m(i, j) - m)^2}$$

avec  $m = \frac{1}{2m+1} \sum_{j=1}^{2m+1} A_s^m(i, j)$  la moyenne des valeurs.

Par exemple, on propose de comparer l'écart type théorique calculé à partir de la proportion de chacune des classes sur une droite discrète, à l'écart type pratique calculé à partir de la distribution des poids sur une droite discrète. Les résultats sont visibles Figure 4.8



(a) Valeur du ratio écart type réel sur la droite  $\mathcal{D}(1, 10, 0, 10)$  et l'écart type théorique donnée par le théorème central limite.



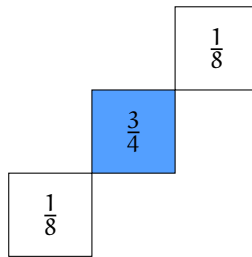
(b) Valeur du ratio écart type réel sur la droite  $\mathcal{D}(1, 7, 0, 7)$  et l'écart type théorique donnée par le théorème central limite.

FIGURE 4.8 : Comparaison entre l'écart type théorique calculé à partir de la proportion des classes d'équivalence et de l'écart type réel issu de la distribution statistique des poids. En fonction du nombre de points, on peut remarquer la convergence rapide.

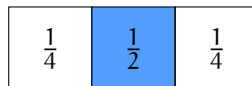
## 4.5 Processus discret Flou

Le processus de diffusion ainsi défini converge vers une loi normale sur des droites discrètes, ce qui est le résultat attendu. Sur  $\mathbb{Z}^2$ , on montre que la distribution des poids est exactement donnée par les nombres binomiaux. On s'attend donc à une propriété équivalente pour les droites discrètes, malgré les paliers dues aux effets discrétisation. Cependant, remarquons que ce processus est dépendant de la pente de la droite, même s'il n'existe que quatre classes d'équivalence sur les droites discrètes, la distribution statistique des poids dépendra de la proportion de chacune. Et certaines réduisent la vitesse du diffusion, ce qui à terme produira un masque de convolution dont l'écart type statistique sera réduit par rapport à une droite pour laquelle cette classe d'équivalence sera moins représentée.

La classe d'équivalence qui réduit le plus la vitesse de propagation est la classe  $0-0$  et celle où la diffusion est la plus rapide est la classe  $1-1$ . En effet sur la classe  $0-0$ , il n'existe qu'un seul coin de part et d'autre du pixel pour se propager :



contrairement à la classe  $1-1$  où de chaque côté il existe deux coins de chaque côté pour pouvoir se diffuser :



Une succession de classe d'équivalence  $0-0$  sera donc un goulot d'étranglement pour les marcheurs.

### Définition 4.5.1 Étranglement

*On définit un couloir d'étranglement comme une succession de plusieurs classes de type  $0-0$  sur un contour discret.*

Pour résoudre ce problème d'étranglement sur un contour discret, nous définissons un processus de diffusion appelée Fuzzy. Ce processus est juste une version étendue du processus déjà introduit mais dont le but est de réduire les effets de la discrétisation des contours.



### 4.5.1 Paramétrisation Curviligne des droites discrètes

Le processus adaptatif dépend de façon implicite d'une numérotation des pixels d'un contour, c'est-à-dire que chaque pixel est vu à un index  $i$  fixant sa position par rapport aux autres. De cette façon la matrice de transition associée permet pour chaque index de ranger la probabilité de transition d'un pixel  $i$  à la colonne  $i$  et la ligne  $i$ . L'écart type de la distribution des poids sur une courbe discrète est donc calculé en tenant compte de cet index. Pour des graphes de fonctions  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  ce choix est efficace, mais cet index ne veut plus dire grand chose pour des courbes arbitraires.

Pour ce type de courbes, une paramétrisation tenant compte de l'abscisse curviligne est nécessaire pour étiqueter chaque pixel. La paramétrisation des courbes par projection est facile à calculer dans le cas des droites discrètes. Pour le processus Fuzzy, si l'on souhaite paramétrer une droite discrète épaisse, il faut être sûr qu'il existe une projection orthogonale qui soit bijective. Ce résultat de Christophe Fiorio, Valérie Berthe et Damien Jamet, se généralise aux plans discrets arithmétiques d'épaisseur  $\omega$ .

#### Théorème 4.5.2 Théorème de fonctionnalité avancé : Fiorio, Berthe et Jamet

Soit  $P(v, \mu, \omega)$  un plan discret arithmétique et soit  $\alpha \in \mathbb{Z}^3$  tel que le  $\text{pgcd}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$ , notons  $\Pi_\alpha^\perp : \mathbb{R}^3 \rightarrow \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, \langle \alpha, \vec{x} \rangle = 0\}$  la projection affine orthogonale sur le plan  $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, \langle \alpha, \vec{x} \rangle = 0\}$  le long de la direction  $\alpha$ , alors l'application  $\Pi_\alpha^\perp : P(v, \mu, \omega) \rightarrow \Pi_\alpha^\perp(\mathbb{Z}^3)$  est une bijection si et seulement si  $|\langle \alpha, v \rangle| = \omega$

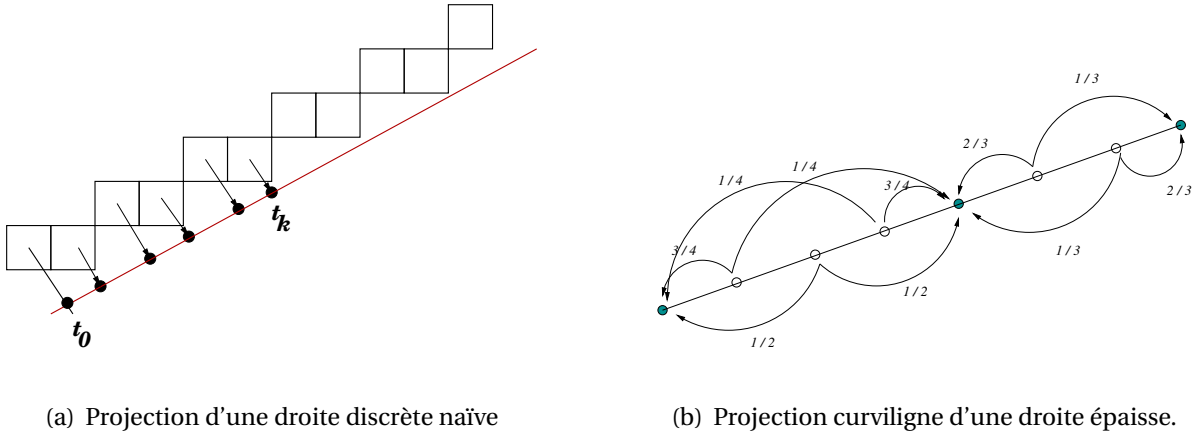


FIGURE 4.9 : Projection d'une droite discrète naïve (à gauche) et d'une droite discrète épaisse (à droite). Pour les droites épaissies, on ramène les marcheurs qui se sont égarés dans l'épaisseur après la projection.

Pour illustrer le Théorème 4.5.2 de la fonctionnalité avancée, on propose Figure 4.9, un exemple de projection de droite naïve et de droite épaisse. Le processus Fuzzy autorise les marcheurs à se déplacer de façon limitée dans l'épaisseur de la droite. Cependant le

masque final qui représente la répartition des marcheurs sur la courbe ne doit pas tenir compte des pixels que l'on a ajoutés : ce sont des pixels fantômes et les marcheurs présents doivent être rapatriés sur les pixels de la courbe les plus proches : pixels principaux.

**Définition 4.5.3** *Pixels fantômes et pixels principaux*

*On appelle pixels fantômes, les pixels rajoutés à une courbe pour faciliter le déplacement des marcheurs. Les pixels de la courbe sont appelés pixels principaux.*

Après projection les pixels fantômes se retrouvent encadrés par des pixels principaux. En tenant compte de la distance d'un pixel fantôme à ses deux pixels principaux les plus proches, on distribue les marcheurs présents dans l'épaisseur aux points principaux (Figure 4.9(b)). Le masque ainsi obtenu ne dépend que des pixels principaux, mais le nombre de marcheurs de chaque pixel a été légèrement modifié par les pixels fantômes.

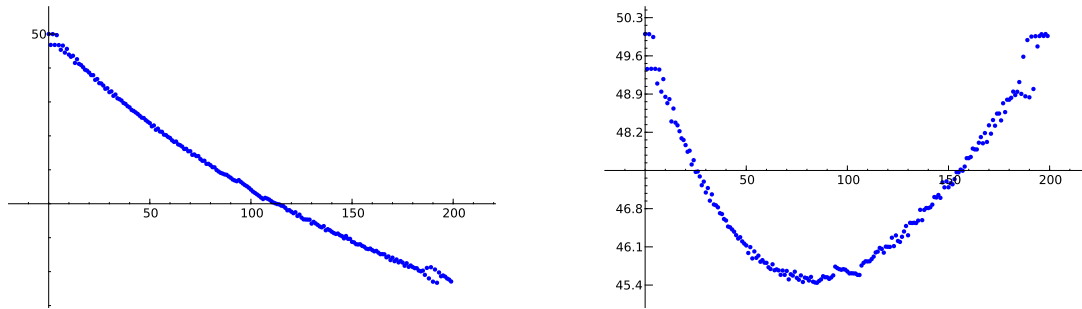
La différence entre la paramétrisation curviligne et l'index du pixel dans une courbe est déterminant. Le processus Fuzzy était motivé par le fait que la classe d'équivalence  $0-0$  avait tendance à ralentir les marcheurs au contraire de la classe  $1-1$  qui avait tendance à accélérer la diffusion. En calculant l'écart type du masque en fonction de l'index, on retrouve le résultat attendu Figure 4.10(a). Sur cette figure, on a tracé la valeur de l'écart type de la répartition des marcheurs pour des droites de pente croissante, dans le premier octant. L'écart type se réduit, quand les pentes se rapprochent de la droite diagonale. La diffusion est de plus en plus lente. Mais en ce qui concerne la paramétrisation, la diffusion se retrouve accélérée d'un facteur  $\sqrt{2}$  compte tenu des diagonales. De ce fait, la classe d'équivalence  $0-0$  diffuse finalement aussi vite que la classe  $1-1$  Figure 4.10(b). Sur cette figure, l'écart type a la forme d'une courbe en cloche avec une diffusion quasi-équivalente pour les droites  $y=0$  et  $y=x$ .

## 4.5.2 Épaississement des contours discrets

Pour éliminer les effets de la discrétisation d'un objet discret et notamment les effets d'étranglements, on offre aux marcheurs des probabilités de diffusion supérieures à proximité des étranglements. On autorise les marcheurs à sortir de la droite discrète de façon à élargir les possibilités de diffusion. Cette méthode peut-être vue comme un effet tunnel classique en mécanique quantique.

**Définition 4.5.4** *Effet Tunnel*

*L'effet tunnel désigne la propriété que possède un objet quantique à franchir une barrière de potentiel, franchissement impossible selon la mécanique classique. Généralement, la fonction d'onde d'une particule, dont le carré du module représente l'amplitude de sa probabilité de présence, ne s'annule pas au niveau de la barrière, mais s'atténue à l'intérieur de la barrière, pratiquement exponentiellement pour une barrière assez large. Si, à la sortie de la barrière de potentiel, la particule possède une probabilité de présence non nulle, elle peut*



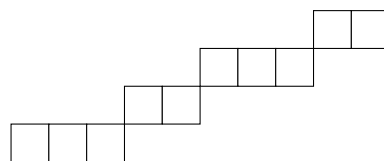
(a) Courbe des écarts types obtenus sur 200 droites de pentes croissantes au bout de 100 itérations. Le minimum est atteint pour les droites possédant le plus de classe  $0-0$  qui agissent comme filtre pour la diffusion

(b) Courbe des écarts types obtenus sur 200 droites de pentes croissantes en tenant compte de l'abscisse curviligne 100 itérations. Le facteur de  $\sqrt{2}$  accélère la diffusion

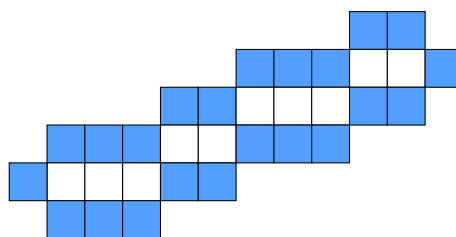
FIGURE 4.10 : Calcul des écarts types sur 200 droites discrètes de pente croissante en utilisant soit l'index soit l'abscisse curviligne. Les résultats sont différents en fonction de la méthode choisie.

*traverser cette barrière. Cette probabilité dépend des états accessibles de part et d'autre de la barrière ainsi que de son extension spatiale.*

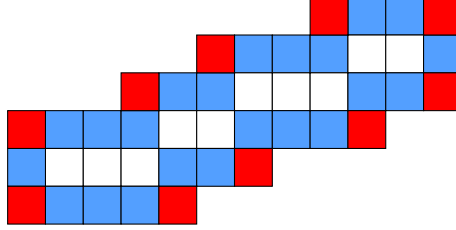
Le contour discret sur lequel se propagent les marcheurs, est protégé par une barrière de potentiel. Les marcheurs avaient jusqu'à présent, une probabilité nulle de franchir cette barrière et de sortir de la droite. Désormais, la barrière de potentiel autorise de façon très limitée quelques marcheurs à se propager dans l'épaisseur de la droite. Considérons trois ensembles naturels pour un contour discret. Une droite discrète 0-connexe, par exemple la droite de pente  $\frac{2}{5}$  :



peut-être élargie en ajoutant les pixels les plus proches de cet ensemble les pixels 1-connexe :



puis ajouter les pixels 0-connexe à cet ensemble :



Dans cet exemple, on retrouve en bleu la barrière de potentiel qui limite les marcheurs dans l'épaisseur de la courbe. En rouge, les pixels les plus éloignés de la courbe, la barrière de potentiel est encore plus élevée et donc le nombre de marcheurs pouvant aller dans ces pixels est encore plus faible.

Nous avons le choix d'ajouter les pixels 1-adjacent et 0-adjacent à la droite, plutôt que de choisir une épaisseur  $\omega$  supérieure pour faciliter la diffusion. Il y a plusieurs raisons à cela. Premièrement, on veut appliquer le processus Fuzzy à n'importe quel type de courbes même s'il est présenté sur des droites discrètes pour réduire l'effet de la discrétisation et normaliser la diffusion sur l'ensemble des droites discrètes. Or, épaissir une courbe peut être un vrai problème et le processus Fuzzy dépendra alors de la façon dont on choisit l'épaississement de la courbe. D'autre part, sur les droites discrètes, augmenter l'épaisseur arithmétique  $\omega$ , permet d'ajouter des pixels mais ce nombre est lié à la pente de la droite. Nous voulons justement éviter que le processus dépende des paramètres globaux, comme la pente ou l'épaisseur arithmétique, de sorte qu'on puisse l'appliquer à n'importe quel ensemble.

### 4.5.3 Matrices Fuzzy et projections curvilignes.

On associe à chacun des trois ensembles successifs une matrice de transition dépendant de l'ensemble élargi. On appelle ces matrices  $M_0$  pour la matrice standard de la courbe, la matrice  $M_1$  la matrice auquel on ajoute les pixels 1-connexe à la courbe et la matrice  $M_2$  pour la matrice dont on ajoute les pixels 0-connexe à la courbe.

#### Définition 4.5.5 Matrices Fuzzy

Soit  $M_0$ ,  $M_1$  et  $M_2$  les matrices d'un ensemble discret, respectivement la courbe standard, celle épaissie avec les pixels 1-connexe, et celle épaissie avec les pixels 0-connexe. Soit les matrices  $M'_0$  et  $M'_1$  induites par  $M_0$  et  $M_1$  dont on a rajouté des lignes et des colonnes de zéros et des 1 sur la diagonale pour les pixels de l'ensemble Fuzzy qui n'appartiennent pas à ces ensembles, de sorte que les trois matrices aient la même dimension que la matrice  $M_2$ . On définit la matrice fuzzy  $F$  comme la matrice dépendant de deux variables  $\lambda$  et  $\mu$  définie comme :

$$F : (\lambda, \mu) \mapsto (1 - (\lambda + \mu))M'_0 + \lambda M'_1 + \mu M'_2$$

La matrice Fuzzy n'est plus une matrice stochastique, mais elle est associée à une chaîne de Markov définie sur un ensemble de pixels plus larges que l'ensemble initial. A la fin du processus, un nombre conséquent de marcheurs vont se retrouver dans l'épaisseur de la courbe, si bien que sur la restriction du processus à la courbe initiale, il manquera des marcheurs. Pour éviter cela, on ramène les marcheurs qui vont se retrouver sur des pixels fantômes, sur des pixels principaux, comme on a pu le voir Figure 4.9(b). Ainsi on ne perd aucun marcheur à la fin de la diffusion.

Les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  contrôlent le nombre de marcheurs autorisés à s'éloigner dans l'épaisseur de la courbe. Par la suite, on déterminera des valeurs de  $\lambda$  et  $\mu$  pour uniformiser le processus de diffusion autant que possible sur les droites discrètes.

Pour illustrer le calcul des masques des processus Fuzzy, nous proposons à titre d'exemple la construction du masque de la classe d'équivalence  $1 - 1$ . Tout d'abord, la première matrice correspond à la matrice initiale de l'ensemble :

0	0	0
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
0	0	0

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
---------------	---------------	---------------

Par projection sur la droite  $y = 0$ , on trouve le premier masque centré en  $(1, 0)$ .

Ensuite, on ajoute les pixels qui se trouvent 1-connectés à la courbe. Dans cet exemple simple, il s'agit de tous les pixels alentours :

$\frac{\lambda}{16}$	$\frac{\lambda}{8}$	$\frac{\lambda}{16}$
$\frac{\lambda}{8}$	$\frac{\lambda}{4}$	$\frac{\lambda}{8}$
$\frac{\lambda}{16}$	$\frac{\lambda}{8}$	$\frac{\lambda}{16}$

$\frac{\lambda}{4}$	$\frac{\lambda}{2}$	$\frac{\lambda}{4}$
---------------------	---------------------	---------------------

On calcule donc la diffusion en tenant compte de ce nouvel ensemble. On multiplie chacune des probabilités par  $\lambda$  de sorte qu'en jouant sur cette valeur, on pourra autoriser ou interdire l'accès à ces pixels. Après projection, on obtient donc un masque qui dépend de  $\lambda$ . Dans le dernier masque, tous les pixels ont déjà été ajoutés à l'étape précédente, la matrice  $M_2$  est donc égale à la matrice  $M_1$  à  $\mu$  près.

$\frac{\mu}{16}$	$\frac{\mu}{8}$	$\frac{\mu}{16}$
$\frac{\mu}{8}$	$\frac{\mu}{4}$	$\frac{\mu}{8}$
$\frac{\mu}{16}$	$\frac{\mu}{8}$	$\frac{\mu}{16}$

$\frac{\mu}{4}$	$\frac{\mu}{2}$	$\frac{\mu}{4}$
-----------------	-----------------	-----------------

Enfin, on calcule la combinaison linéaire des trois masques pour obtenir le masque final.

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
---------------	---------------	---------------

Dans ce cas particulier, le masque final ne dépend pas de  $\lambda$  et  $\mu$ . Cela s'explique par la projection choisie pour ramener les marcheurs des pixels fantômes vers les pixels principaux. Les marcheurs qui s'égarer dans l'épaisseur sont par projection, exactement ren-

voyés dans leur pixel de départ. Ainsi il n'y a aucune dépendance avec  $\lambda$  et  $\mu$ . Ce n'est pas le cas en général.

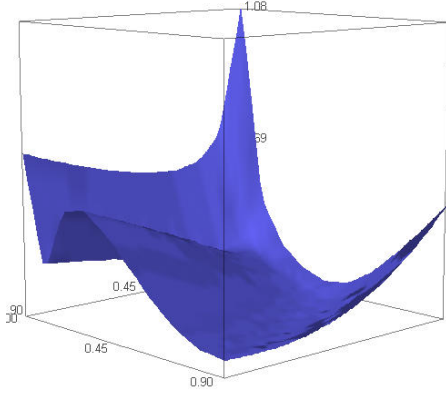
#### 4.5.4 Calcul des probabilités des pixels fantômes

Expérimentalement, nous avons trouvé deux valeurs pour  $\lambda$  et  $\mu$ . Nous avons calculé pour plusieurs valeurs de  $\lambda$  et  $\mu$  comprise entre 0 et 1, l'écart type moyen sur des centaines de droites. Cette expérience a pour but de limiter l'impact de la pente d'une droite discrète sur le calcul de son écart type et comme en géométrie euclidienne classique, chaque droite offre une diffusion similaire aux droites  $y = 0$  ou  $y = x$ , ce qui n'était pas le cas avec le premier processus.

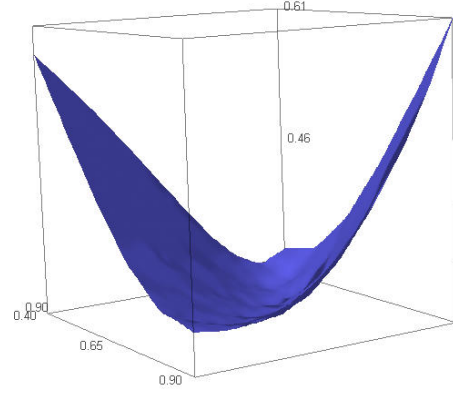
Les classes d'équivalence jouent un rôle important dans la valeur de l'écart type. C'est de cette façon que l'on a pu de façon théorique démontrer la convergence vers une loi normale des poids sur n'importe quelle droite discrète (Théorème 4.4.7). Pour limiter l'impact, on a défini un processus Fuzzy dépendant de deux variables qui permet de régler la diffusion, pour accélérer ou limiter les effets de discrétisation tel que les goulots d'étranglement. Mais il fallait déterminer pour quelles valeurs de  $\lambda$  et  $\mu$ , c'est-à-dire quelle quantité de marcheur, on autorise à se déplacer dans l'épaisseur, pour que la diffusion ne soit plus dépendante du nombre de classes d'équivalence. Donc pour 200 droites de pentes croissantes, nous avons calculé pour une valeur de  $\lambda$  et  $\mu$  fixée, l'écart type du masque pour chacune de ces droites. Nous avons calculé l'écart type de tous ces écart types pour mesurer leurs dispersions des uns par rapport aux autres. Ainsi nous avons obtenu une surface en trois dimensions Figure 4.11(a) avec sur l'axe  $Oz$  la valeur de cet écart type pour une valeur  $\lambda$  de l'axe  $Ox$  et une valeur de  $\mu$  sur l'axe  $Oy$ .

Malgré un zoom sur la partie minimale de cette surface Figure 4.11(b), la valeur minimale est difficile à trouver. En effet, une large vallée de valeurs, donne une dispersion limitée des écarts types sur l'ensemble des droites. L'objectif de cette expérience était de voir si un couple de valeurs n'aurait pas une signification arithmétique pour nous donner l'intuition des bonnes valeurs à choisir pour le processus Fuzzy, compte tenu des valeurs de  $\lambda$  et  $\mu$  solutions potentielles. Les résultats n'étant pas convaincants, la solution expérimentale pour caractériser  $\lambda$  et  $\mu$  a été écartée.

Pour calculer de façon analytique les valeurs de la propagation dans l'épaisseur qui limite les effets d'étranglement, regardons la courbe des écart types sur les droites de pentes croissantes Figure 4.10(b). A cause du facteur de  $\sqrt{2}$  dû à la projection, les droites  $y = x$  et  $y = 0$  diffusent approximativement de la même façon. En revanche, les droites de pente intermédiaire sont celles qui vont diffuser le moins vite. Il faut donc limiter, l'écart de diffusion entre les droites  $y = x$  ou  $y = 0$  et les droites qui se trouvent dans le creux de la courbe. Ces droites sont composées exclusivement de classes d'équivalences  $1 - 0$  ou  $0 - 1$ . Notons  $\sigma(0 - 0)$  l'écart type du masque pour une droite composée exclusivement de la classe d'équivalence  $0 - 0$ . Le masque obtenu par cette projection est celui présenté Figure 4.5.3. L'écart type de ce masque se déduit facilement :



(a) Écart type des écart types calculés sur 200 droites discrètes sur l'axe Oz pour des valeurs de  $\lambda$  sur l'axe Ox et  $\mu$  axe Oy



(b) Zoom sur la partie minimale de la surface

FIGURE 4.11 : Calcul des écarts types sur 200 droites discrètes de pente croissante en utilisant l'abscisse curviligne pour des valeurs de  $\lambda$  et  $\mu$  comprise entre 0 et 1

$$\sigma(0-0) = \frac{\sqrt{2}}{12} \quad (4.35)$$

Ce masque comme on a pu le voir précédemment ne dépend pas de  $\lambda$  et  $\mu$ . De façon similaire, calculons le masque projeté en fonction de  $\lambda$  et  $\mu$ , d'une droite dont l'écart type est minimal. D'après les remarques précédentes, il s'agit d'une droite exclusivement composée des classes 0 – 1 ou 1 – 0. Le masque après projection est le masque :

$$\mathcal{M} := \left[ \frac{4}{16} + \frac{\lambda}{36} + \frac{\mu}{48}, \frac{5}{8} - \frac{61\lambda}{576} + \frac{11\mu}{96}, \frac{1}{8} + \frac{5\lambda}{64} + \frac{3\mu}{32} \right]$$

Pour comprendre les valeurs du masque obtenu, il suffit de repartir du masque initial de la classe 1 – 0. Ce masque sans épaisseur est le masque  $[\frac{4}{16}, \frac{5}{8}, \frac{1}{8}]$ . Après épaisseur et projection sur la droite  $y = \frac{1}{4}x$  un certains nombres de marcheurs  $\frac{61\lambda}{576} + \frac{11\mu}{96}$  ont été retiré du point de départ et ont été distribué aux voisins les plus proches. D'où le masque Fuzzy  $\mathcal{M}$ .

Ensuite, on calcule la valeur de l'écart type  $\sigma(1-0)$ , qui dépendra de  $\lambda$  et  $\mu$ . On veut donc résoudre l'équation suivante :

$$R(\lambda, \mu) = \sigma(0-0) - \sigma(1-0) = 0 \quad (4.36)$$

$$(4.37)$$



Pour réduire la recherche, on sait que  $0 \leq \lambda \leq 1$  et  $0 \leq \mu \leq 1$ . Figure 4.12, on a représenté en violet le polynôme  $R(\lambda, \mu)$  restreint à  $0 \leq \lambda \leq 1$  et  $0 \leq \mu \leq 1$ . L'ensemble des solutions est compatible avec la vallée de solutions expérimentales Figure 4.11(b). Pour trouver le bon couple de valeurs, on choisit la valeur telle que le nombre de marcheurs allant le plus loin dans l'épaisseur soit minimal. On trouve donc  $\lambda = 1$  et  $\mu \sim 0.197$ . Pour ce couple, la différence entre les écarts types des classes d'équivalences 0-0 et 1-0 est égale à  $R(1, 0.197) = 3.10^{-6}$

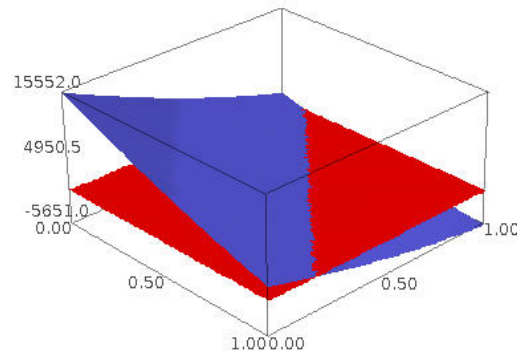


FIGURE 4.12 : Solutions de l'équation  $P(\lambda, \mu) = 0$  pour  $0 \leq \lambda \leq 1$  et  $0 \leq \mu \leq 1$

#### 4.5.5 Conclusion

Nous avons défini un processus de diffusion discret basé sur les chaînes de Markov. Les poids de ce processus sur la droite  $y = 0$  sont donnés par les nombres binomiaux, ce qui le rend équivalent aux méthodes de convolutions classiques sur les parties régulières. En revanche, la discrétisation des droites discrètes, induit des paliers et des goulots d'étranglement qui vont ralentir le processus. Ainsi malgré le fait que la diffusion suit toujours une loi de type gaussien sur les droites discrètes, l'écart type de cette diffusion dépend de la pente de la droite. A l'aide des processus flous, on peut limiter l'impact de la pente de la droite sur la diffusion, en autorisant les marcheurs à s'égarer dans l'épaisseur de la droite. Ce principe est philosophiquement le même que celui utilisé en mécanique quantique avec l'effet tunnel. Les pixels hors de l'objet agissent comme un isolant et les pixels fantômes simulent un effet tunnel en autorisant avec une probabilité faible de traverser une partie de l'isolant. Le principe du processus Fuzzy est de mettre une probabilité faible mais non nulle pour les marcheurs de franchir cette barrière. Grâce à des valeurs de  $\lambda$  et

$\mu$  choisies avec soin, le processus ne dépendra presque plus de la pente de la droite. La diffusion sera donc équivalente quelque soit le type de droite sur lequel il y a propagation et permet le calcul sur des courbes moins régulières comme des graphes.

## 4.6 Opérateur Laplacien discret

Dans cette première partie, nous avons présenté un processus de diffusion discret basé sur les chaînes de Markov. Dans un premier temps, on a montré les propriétés de ce processus et notamment le comportement de la distribution des poids sur les droites discrètes. Elles sont les objets les plus réguliers et les plus simples, il était donc important de se convaincre que comme sur  $\mathbb{Z}$  (où sur  $\mathbb{Z}^n$ ), le comportement était similaire quelque soit la pente de la droite. L'intérêt des processus Fuzzy est de justement pouvoir uniformiser cette diffusion à l'ensemble des droites discrètes. Nous verrons par la suite, une autre interprétation du processus Fuzzy dans le cadre de l'analyse d'images en niveaux de gris.

### 4.6.1 Définition de l'équation de diffusion discrète

Dans l'introduction de ce chapitre, on a montré que l'équation de diffusion de la chaleur induisait un opérateur Laplacien qui permettait de déduire certaines informations géométriques de la surface de support. Voyons maintenant une façon originale de définir un opérateur Laplacien discret à partir du processus de diffusion défini ci-dessus.

**Définition 4.6.1** *Opérateur Laplacien Discret*

Soit  $A_s$  la matrice stochastique de diffusion sur une surface  $M$ . Alors on définit l'opérateur Laplacien discret sur  $M$ , noté  $\Delta_M$  :

$$\Delta_M = A_s - \text{Id} \quad (4.38)$$

où  $\text{Id}$ , est la matrice identité.

Pour justifier cette définition, écrivons l'équation de diffusion sur la surface  $M$ . Soit  $u(m, i)$  qui représente le nombre de marcheurs au point  $i$  après  $m$  étapes.

$$u(m, i) = \mathbb{E}_i u_0(X_m) = \sum_{j \in M} u_0(j) A_s^m(i, j)$$

avec  $u_0$  la distribution initiale. On a alors :

$$\begin{aligned}
 \frac{u(m+1, i) - u(m, i)}{2} &= \left( \sum_{j \in \mathcal{M}} u_0(j) (A_s^m (A_s - \text{Id})) \right) (i, j) \\
 &= ((A_s - \text{Id}) \sum_{j \in \mathcal{M}} u_0(j) A_s^m) (i, j) \\
 &= (A_s - \text{Id}) u(m)
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Comme dans le cas de l'équation de diffusion de la chaleur on à l'équation de diffusion suivante :

$$\frac{\delta u(m, x)}{\delta m} = (A_s - \text{Id}) u(m, x)$$

Si l'on se réfère à l'équation (4.1), on a que le Laplacien  $\Delta_M := -(A_s - \text{Id})$

#### 4.6.2 Étude des vecteurs propres du Laplacien

Dans cette partie, nous étudierons les vecteurs propres et les valeurs propres du Laplacien défini grâce à l'équation 4.39. Dans les travaux de Bruno Levy [Lév06], les vecteurs propres du Laplacien  $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$  d'un objet sont utilisés pour comprendre sa géométrie et sa topologie. L'avantage des vecteurs propres du Laplacien, c'est qu'ils sont résistants au bruit. Ainsi on peut découper une surface en fonction de ses fréquences pour proposer une segmentation de la surface. A titre d'exemple, on propose d'étudier un type d'objet géométrique simple, les étoiles discrètes, pour mettre en évidence le découpage de la surface à l'aide des vecteurs propres.

##### Définition 4.6.2 Etoile discrète

Un ensemble  $\mathcal{D} \in \mathbb{Z}^2$  est appelé étoile discrète, s'il existe un point  $p \in \mathcal{D}$  que l'on appelle le centre de l'étoile, tel que pour tout point  $q \in \mathcal{D}$ , il existe un segment partant du point  $p$  vers le point  $q$  contenu strictement dans  $\mathcal{D}$ .

##### Propriété 4.6.1 [BB10]

Un ensemble  $\mathcal{D} \in \mathbb{Z}^2$  est une étoile discrète si et seulement si c'est une union d'ensembles digitaux convexes qui partagent un même point.

##### Définition 4.6.3 Branches d'une étoile

On appelle les branches d'une étoile discrète chaque partie convexe de l'étoile dont on a supprimé le centre.

Pour étudier les vecteurs propres du Laplacien sur ce type d'ensembles, il faut se restreindre à certains cas plus simples. En effet, on peut construire des étoiles dont la forme sera suffisamment particulière pour que le Laplacien ne détecte pas certaines branches considérées comme du bruit.

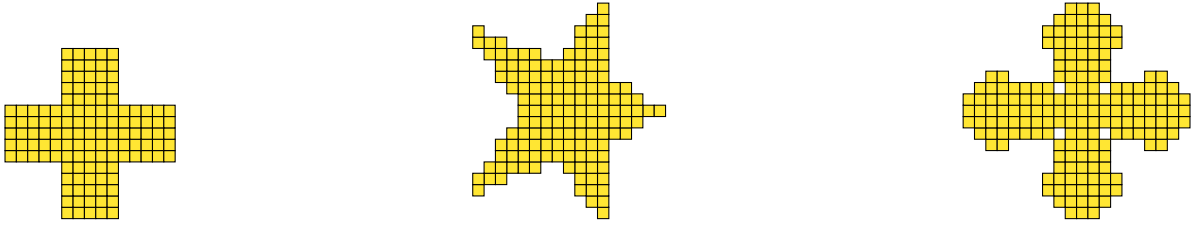


FIGURE 4.13 : Exemples d'étoiles discrète  $\mathbb{Z}^2$ . Il existe plusieurs solutions pour le centre de ces étoiles.

**Définition 4.6.4** *Étoiles discrètes simples*

*On appelle une étoile discrète simple, une étoile qui possède deux axes de symétries.*

Des étoiles discrètes simples sont proposées Figure 4.13. Ce sont des étoiles en forme de fleurs, dont les branches sont approximativement de la même longueur et bien réparti autour du centre. Évidemment, cela ne représente qu'une petite proportion de l'ensemble des étoiles discrètes. Néanmoins elles sont suffisantes pour illustrer l'application du Laplacien, et retrouver ainsi les axes de symétries attendus. Dans cet exemple, on s'attend à retrouver exactement les deux axes de symétries de l'étoile et on montrera également une façon de retrouver le centre.

L'étoile la plus simple est la croix suisse (Figure 4.6.2). Cette étoile est une étoile simple à quatre branches possédant quatre axes de symétries. Les premiers vecteurs propres du Laplacien Figure 4.14(a) et Figure 4.14(b) permettent de retrouver les deux axes de symétries principaux de l'étoile. Par suite Figure 4.14(c), Figure 4.14(d) et Figure 4.14(e) on découvre d'autres axes de diffusion propres de l'étoile permettant de la segmenter pour retrouver le nombre de ses branches.

Un autre exemple d'application est d'utiliser les vecteurs propres du Laplacien et notamment les premiers pour retrouver des informations sur le centre de l'étoile. Les premiers vecteurs propres comme on peut le voir sur la Figure 4.6.2, donnent des directions propres de diffusion. Ce sont ces directions qui permettent de retrouver des informations géométriques globales de la surface. Pour détecter le centre de l'étoile, on pourrait croire que l'intersection de ces diffusion propres seraient une solution. En général, le résultat est faux. Cependant, dans notre exemple simple, on prouvera que le centroïde coïncide avec le centre de l'étoile pour ces cas très particuliers. L'intersection des diffusions propres sur une étoile irrégulière avec une structure particulière donne une solution, mais ce centre n'aurait pas de rapport ni de lien avec le centre au sens de la définition des étoiles discrètes.

**Définition 4.6.5** *Intersection de Vecteurs propres*

*Soit  $A_s$  la matrice stochastique du processus adaptatif, soit  $P$  la matrice de ses vecteurs propres et  $D$  la matrice diagonale de ses valeurs propres triées par ordre décroissant tel que*

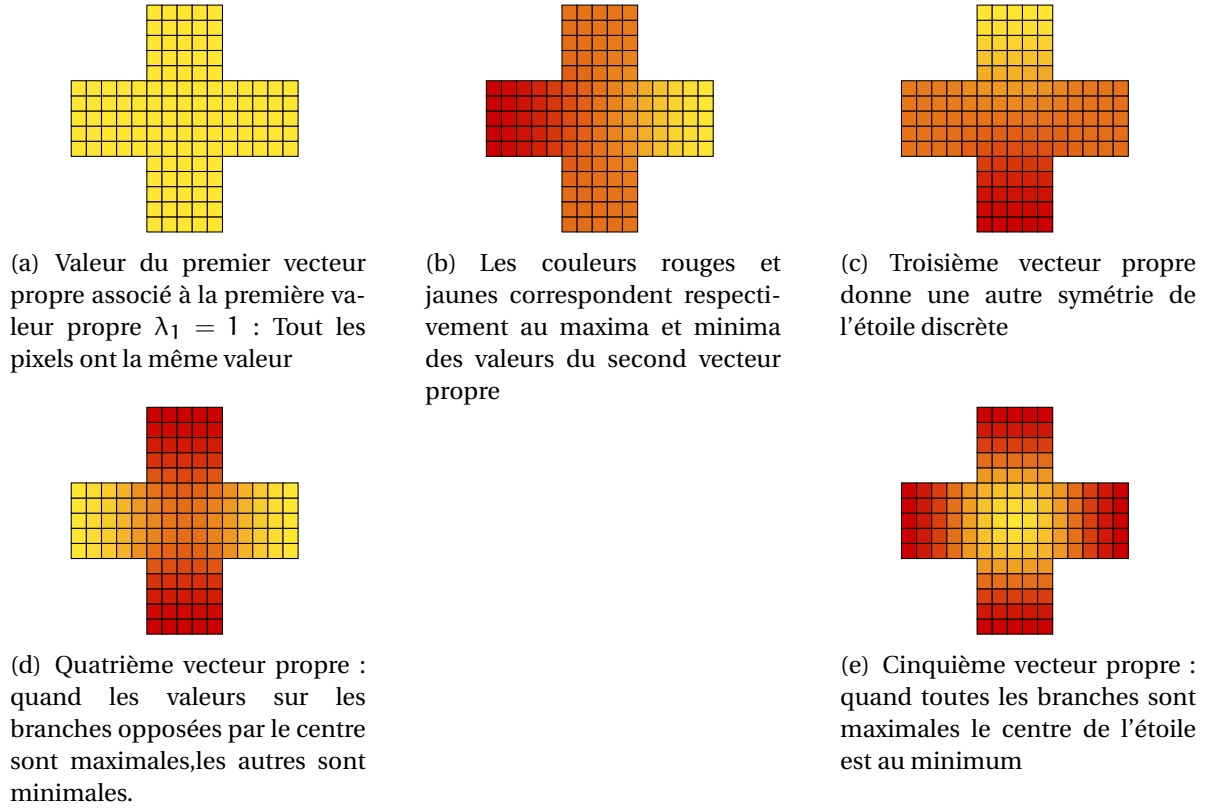


FIGURE 4.14 : Premier vecteur propre du Laplacien sur une étoile discrète simple. Le Laplacien adaptatif permet de retrouver les informations sur les axes de symétries de l'étoile. Le vecteur propre 2 et 3 Figure 4.14(a) et Figure 4.14(b) donnent les deux premiers axes de symétries. Ensuite Figure 4.14(c), Figure 4.14(d) et Figure 4.14(e) permettent de segmenter l'étoile selon ses parties convexes.

$A_s = PDP^T$ . Notons  $P = (\phi_0 | \phi_1 | \dots | \phi_n)$  avec  $\phi_i$  le vecteur colonne correspond au  $i$ -ième vecteur propre. On appelle l'intersection des  $\ell$  premiers vecteurs propres au point  $x$ , la valeur  $I_x^{(\ell)}$  :

$$I_x^{(\ell)} = \sum_{i=0}^{\ell} \phi_i^2(x) \quad (4.40)$$

L'intersection des vecteurs propres se calcule itérativement. A chaque étape on ajoute un vecteur propre supplémentaire et on calcule en chaque point de la surface la valeur de l'intersection. En particulier, on recherche sa valeur minimale. Les points de l'axe de symétries sont les points dont les valeurs du vecteur propres valent 0. Or dans le calcul de l'intersection, on prend la norme deux de chaque vecteur propre, c'est-à-dire que les

valeurs de l'axe de symétrie sont les valeurs minimales. Le recouplement à chaque itération permet de déduire un ensemble réduit de points que l'on appellera centroides.

**Définition 4.6.6** *Centroïde*

Soit  $\mathcal{J}^\ell = \{x \in \mathcal{D} / I_x^{(\ell)} = \min_{y \in \mathcal{D}} (I_y^{(\ell)})\}$  l'ensemble des positions où la valeur minimale  $I_x^{(\ell)}$  est atteinte pour  $x \in \mathcal{D}$ . On appelle centroïde l'ensemble des points tel que  $\mathcal{J}^\ell = \mathcal{J}^{\ell+1}$

**Remarque.** Dans les cas génériques, le centroïde est simplement réduit à un seul point, notamment dans le cadre des étoiles simples discrètes, mais il pourrait aussi correspondre à un ensemble de points équivalents. Le nom de centroïde vient du fait que le centre calculé de cette façon est une intersection de diffusions propres à l'objet. Ce centre n'a donc a priori aucun lien avec le centre de l'étoile discrète. D'autres exemples seront fournis par la suite où le centroïde n'a aussi aucun lien avec le centre géométrique d'un objet discret. Insistons sur le fait que le centroïde n'est pas un barycentre, mais bien l'intersection de directions de diffusion que possède naturellement le processus de diffusion adaptatifs. Le centre est simplement l'intersection de toutes ces directions. Dans la définition, on appelle le centroïde la première collision obtenue lors de l'ajout successifs des vecteurs propres. De cette façon, on s'affranchit d'ajouter d'autres vecteurs propres dont les caractéristiques géométriques sont plus difficiles à déterminer. Les informations géométriques contenues dans les vecteurs propres associés aux plus petites valeurs propres sont très difficile à interpréter, cependant on pourrait très bien continuer le processus à la recherche d'autres collisions pour détecter d'autres centroides.

**Proposition 4.6.1** *Centroïde d'étoiles simples*

Soit  $\mathcal{D}$  une étoile discrète simple, si  $\mathcal{J}^\ell = \mathcal{J}^{\ell+1}$ , le centroïde  $\mathcal{J}^\ell$  est le centre d'une étoile discrète.

Par rapport à la remarque 4.6.2, la proposition vient faire le lien dans un cas très simple (celui des étoiles discrètes simples) entre le centroïde et le centre de l'étoile. Dans un cadre plus générique, cette proposition est évidemment fausse, et il est très facile de construire un contre exemple en jouant sur la non-sensibilité du Laplacien au bruit. Le fait est que sur une étoile discrète simple, deux axes de symétries qui seront détectés par les premiers vecteurs propres, fixent le centre de l'étoile. Or il est facile de voir que le centre de l'étoile est exactement à l'intersection de ces deux axes de symétries. Dans ce cas seulement, les vecteurs propres du Laplacien vont se retrouver très proches de la droite discrète qui constitue l'axe de symétrie et donc très proches du centre de l'étoile. Donc après itérations le centroïde et le centre vont coïncider.

**Démonstration :**

Soit  $\lambda_{k+1}$  une valeur propre tel que le minimum du vecteur propre  $\phi_{k+1}$  associé à la valeur propre  $\lambda_{k+1}$  est atteinte au centre de symétrie  $p_{k+1}$  de l'étoile discrète. L'existence de cette valeur propre peut-être montré à l'aide d'une analogie physique déjà présenté avec

les plaques de Chladni Figure 4.1. Une étoile discrète peut donc être vue comme la membrane d'un tambour et on frappe l'étoile à différents endroits pour écouter les différentes vibrations du son dans l'étoile. Chaque vecteur propre possède un mode de vibration en fonction des différentes branches de l'étoile.

Soit  $\lambda_\ell$  une valeur propre telle que  $1 > \lambda_\ell > \lambda_k$ . Alors  $\phi_\ell$  donne une symétrie particulière de l'étoile discrète, c'est-à-dire que les valeurs positives et négatives coupent l'étoile en plusieurs parties et les zéros du vecteurs propres dessinent l'axe de symétrie. On envoie les minima du vecteur propre sur l'axe de symétrie en passant à la norme deux :  $N(\phi_\ell) = \phi_\ell^2(x)$  pour  $x \in \mathcal{D}$ . De part la propriété 4.6.1 des étoiles discrètes, deux branches en vibration partagent un point commun  $p_\ell$ . Sous l'hypothèse que  $\mathcal{D}$  est une étoile discrète simple, les deux axes de symétries sont des segments discrets contenus dans l'étoile au sens strict. Donc tous les points des deux branches en vibrations peuvent être reliés par un segment au point  $p_\ell \in \mathcal{J}^\ell$ .

Soit  $I_x^{(\ell)} = \sum_{i=0}^{\ell} \phi_i^2(x)$  l'intersection des vecteurs propres pour  $i \in [1..\ell]$ . Soit  $\mathcal{J}^\ell$  la position de la valeur minimale après  $\ell$  intersections. Par construction la valeur minimale se trouve sur un axe de symétrie. Donc la position après  $\ell$  intersections, est un point proche de chaque axe de symétrie. Par hypothèse nous avons  $\mathcal{J}^\ell = \mathcal{J}^{\ell+1}$  et soit  $p_{\ell+1} \in \mathcal{J}^{\ell+1}$  la position de la valeur minimale. Ce point appartient à la direction de diffusion  $\phi_{\ell+1}$  mais aussi à toutes les précédentes. Supposons que  $p_\ell$  ne soit pas le centre de l'étoile, c'est-à-dire qu'il existe une branche qui n'est pas vu par  $p_{\ell+1}$ . Alors si l'on note  $C_{\mathcal{D}}$  l'ensemble des solution pour le centre de l'étoile,  $C_{\mathcal{D}} \subsetneq \mathcal{J}^{\ell+1}$  et  $p_{\ell+1} \notin C_{\mathcal{D}}$ . Donc il existe un axe de symétrie dans l'étoile à l'index  $e$  tel que  $1 > \ell > e > k+1$  qui coupe  $\mathcal{J}^{\ell+1} = \mathcal{J}^e \cup R$  avec  $R$  le reste des valeurs minimale :  $p_{\ell+1} \in R$  Mais on a aussi  $\mathcal{J}^\ell = \mathcal{J}^e \cup R$ , donc la directions propre  $\phi_{\ell+1}$  coupe  $\mathcal{J}^\ell$  exactement de la même façon que  $\phi_\ell$  pour  $\mathcal{J}^{\ell-1}$  alors  $\phi_\ell = \phi_{\ell+1}$ , contradiction. □

Des exemples de détection de centroides sont proposés Figure 4.15. Les étoiles présentés ne sont pas forcément des étoiles simples Figure 4.15(f), néanmoins on détecte le seul point commun à toutes les droites qui composent cette étoile. Figure 4.15(a) une première itération dans la détection des centroides met en évidence deux points le long de l'axe de symétrie qui sont les minima pour la diffusion. Cela provient du fait que l'étoile à une branche plus longue du côté gauche. Ensuite Figure 4.15(b), l'ajout d'un deuxième axe de symétrie fixe d'avantage le centre, et enfin Figure 4.15(c), la première collision indique que le centroïde ne se déplace plus, c'est donc le point recherché. Figure 4.15(d) et Figure 4.15(e), deux autres exemples de détection de centroides. Un autre exemple plus complexe est donné (Figure 4.16) pour voir les limites de la décomposition spectrale dans le cas où l'étoile n'a aucun axe de symétrie.

Un autre exemple est donné Figure 4.17. Dans cet exemple, l'objet discret comporte deux trous qui correspondent aux yeux de la pieuvre ainsi que des pattes recourbées qui correspondent aux tentacules. Malgré cela, on remarque que les vecteurs propres successifs donnent un idée de la géométrie de la pieuvre. Chaque tentacule va se mettre à vibrer

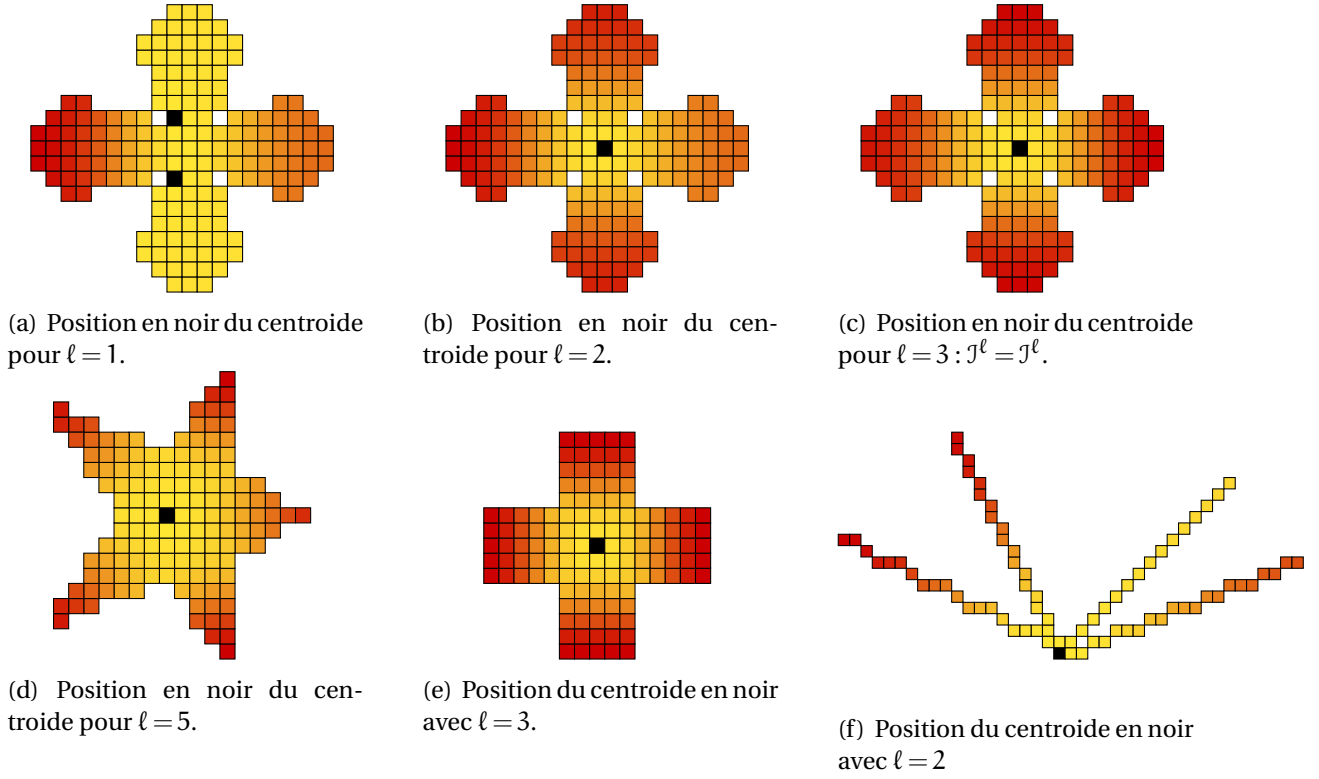


FIGURE 4.15 : Exemples de centroïdes détectés par les vecteurs propres du Laplacien.

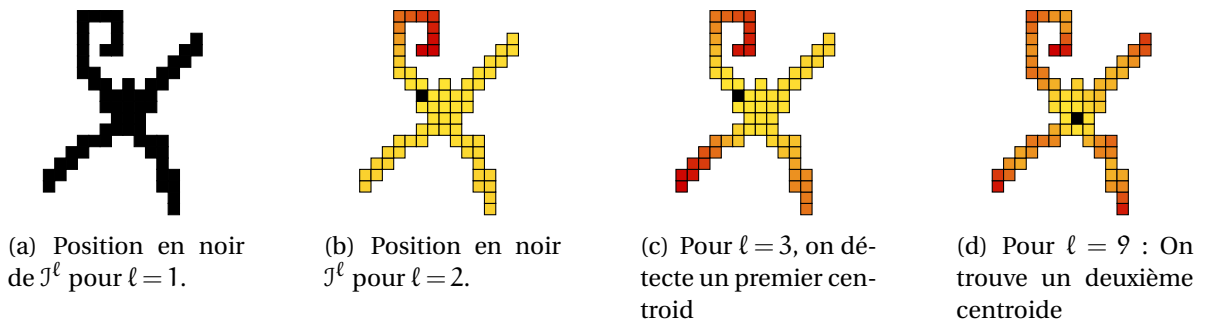


FIGURE 4.16 : Autre exemple sans symétrie. L'opérateur Laplacien ignore la courbure des branches de l'étoile et il faut continuer l'intersection des vecteurs propres pour trouver un centroïde plus pertinent.



en phase (couleur bleu et rouge) et on sera donc en mesure d'en déduire le nombre et ce, malgré la forme particulière.

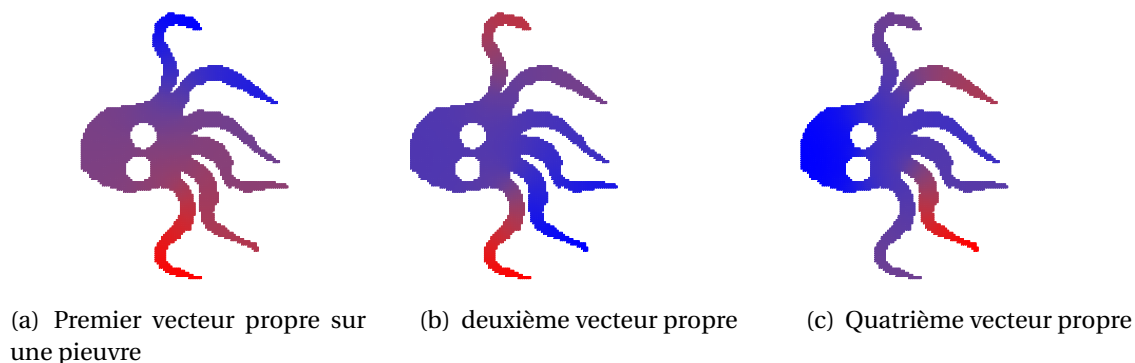


FIGURE 4.17 : Exemple de décomposition spectrales sur une pieuvre

### 4.6.3 Expérience de Chladni discrète

L'expérience de Chladni [Chl09] consiste à étudier sur une plaque de métal les contours complexes induits par les noeuds des ondes qui se propagent sur la plaque. Pour différentes fréquences, le sable dessine des formes (voir Figure 4.18) que Ernst Chladni a retranscrit dans son Traité d'acoustique. Pour étudier la convergence de l'opérateur Laplacien, on pourrait réaliser la même expérience que Chladni en utilisant une grille régulière carrée. On étudie la décomposition spectrale du Laplacien sur cet objet pour un pas de discrétisation suffisamment fin et on repère les valeurs nulles de chaque vecteur propres. On retrouve (Figure 4.19 et Figure 4.21) les contours complexes de chaque figure vue par Chladni avec ces ondes acoustiques. Le résultat est prometteur, car l'opérateur Laplacien que nous avons défini est basé uniquement sur la topologie de l'ensemble, mais pour un pas de discrétisation assez large, tout laisse à penser qu'il converge vers l'opérateur usuel. Une étude plus attentive sera faite Section 4.6.4.

### 4.6.4 Noyau de la diffusion

De façon analogue, nous étudions les vecteurs du Laplacien sur des surfaces en trois dimensions ou de dimension supérieure, le processus étant défini sur des objets de dimension quelconque. Dans cette partie on cherche à faire le lien avec les travaux de Rasmus Larsen et Jian Sun, Maks Ovsjanikov, et Leonidas Guibas en 2009 puis sa généralisation avec les travaux de Michael M. Bronstein et Alexander M. Bronstein. Dans ces travaux, les auteurs utilisent les vecteurs propres du Laplacien pour calculer une signature thermique de chaque point d'une surface. Cette signature calculée sur un maillage de points, tient compte de la perte de chaleur que subit un point pendant un certain laps de temps  $t$ . De

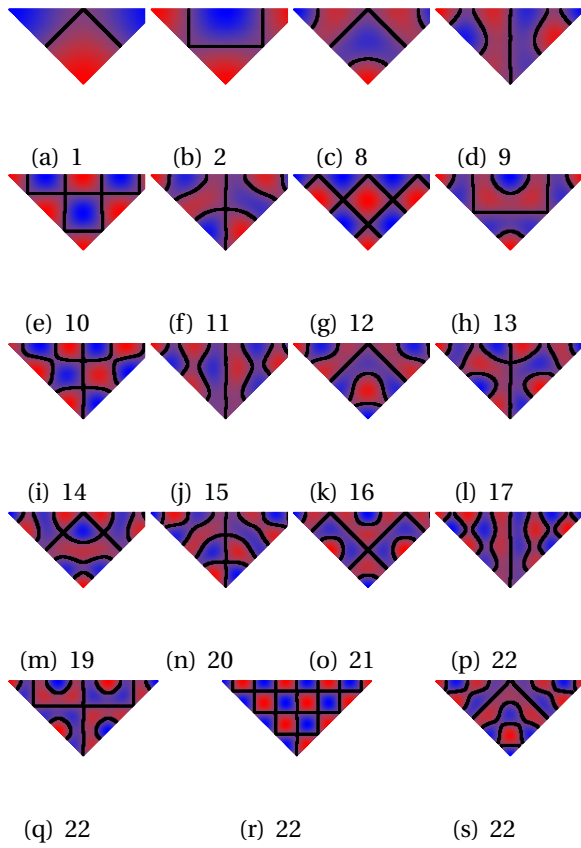


FIGURE 4.18 : Contours des ondes acoustiques sur une plaque de métal triangulaire.

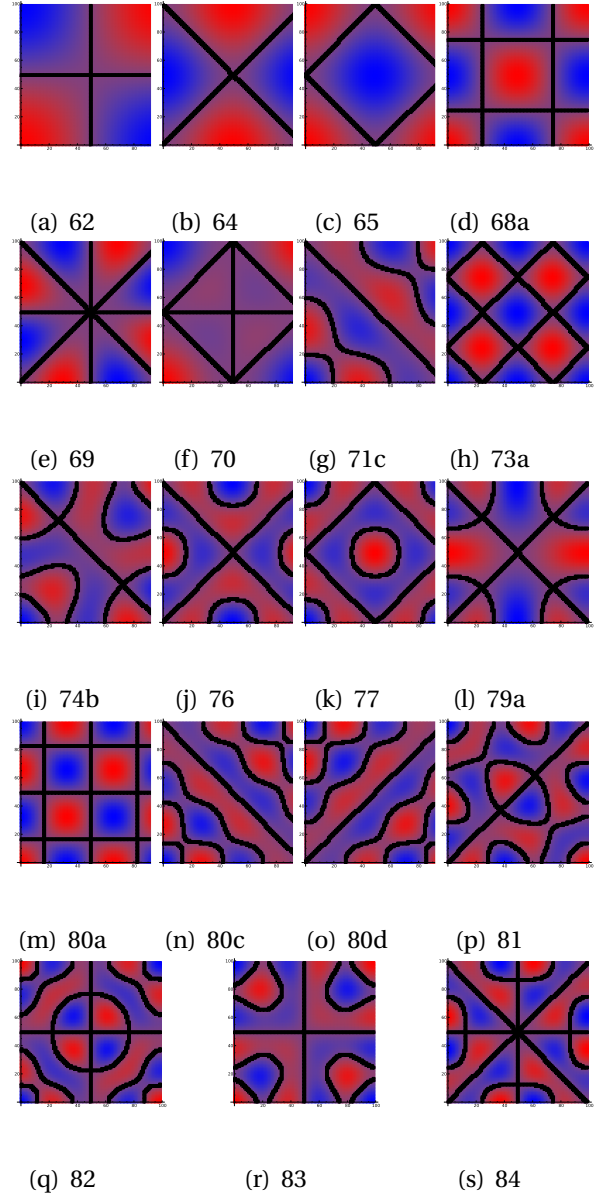


FIGURE 4.19 : Contour discret des vecteurs propres obtenu sur une assiette carré avec un pas de discrétisation de  $\frac{1}{100}$ . On dessine en rouge et bleu les valeurs du vecteur propre et en noir les valeurs nulles.

FIGURE 4.20 : On retrouve les contours continus observés par Chladni en 1802 sur les contours discrets obtenus à l'aide de la décomposition spectrale de l'opérateur de Laplace discret.

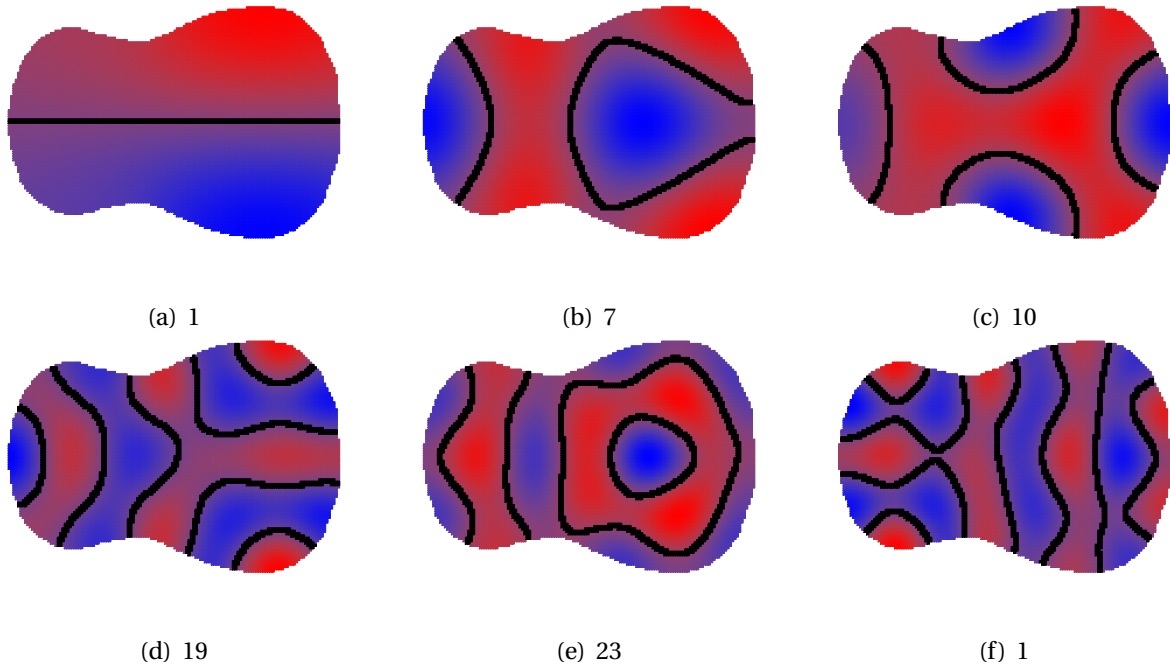


FIGURE 4.21 : Contour discret des vecteurs propres obtenu sur une guitare avec un pas de discrétisation de  $\frac{1}{100}$ . On dessine en rouge et bleu les valeurs du vecteur propre et en noir les valeurs nulles.

cette façon en regardant tous les points de la surface, on déduit des informations sur des similitudes sur la surface :

$$\text{HKS}(p, t) = \sum_{i \in \Omega} e^{-t\lambda_i} \phi_i(p)^2 \quad (4.41)$$

Cette définition ne tient compte que des vecteurs propres et des valeurs propres du Laplacien de la surface. De façon analogue, on définit un noyau de la diffusion avec le Laplacien auto-adaptatifs. Un exemple d'application est donnée Figure 4.22(c).

#### 4.6.5 Généralisation sur les réseaux de diamants

L'opérateur Laplacien a été défini sur des voxels dans un espace de dimension  $n$ . Il est cependant important de faire le lien avec les discrétisations des opérateurs Laplacien définis sur des maillages. Nous modifions la définition de la diffusion pour la généraliser à toute type de surfaces et les surfaces voxéliques seront des cas particuliers de cette définition.

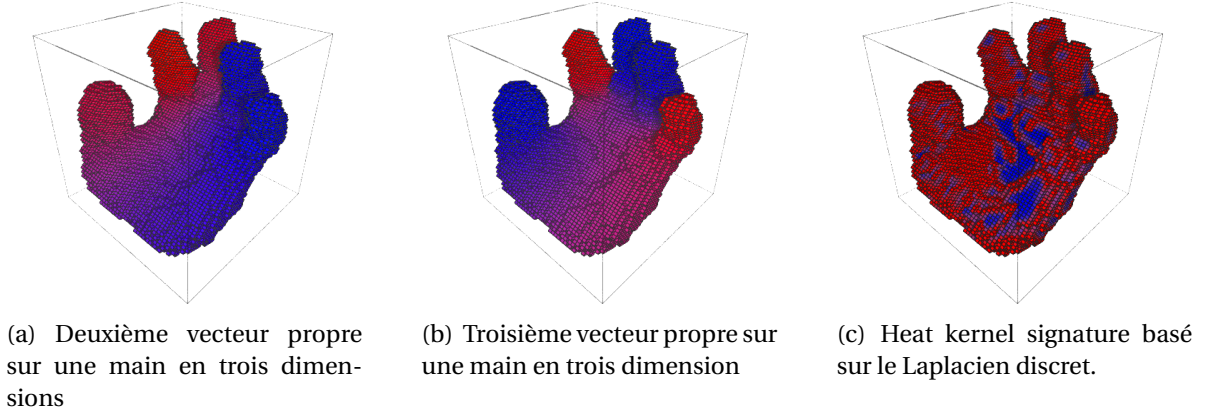


FIGURE 4.22 : Exemple d'application du Laplacien discret sur une main en trois dimensions. Remarquons Figure 4.22(a) et Figure 4.22(b) les modes de vibrations des doigts les uns par rapport aux autres. Enfin Figure 4.22(c), on applique le heat kernel signature de la même façon que sur les surfaces maillées. On retrouve bien le bout des doigts, les parties plates comme la paume de la main ou l'intérieur des doigts.

#### Définition 4.6.7 Réseau de diamants

On appelle un réseau de diamants de rapport  $\rho$ , le réseau de quadrilatères réguliers dont le rapport des diagonales de chaque quadrilatère est égale à  $\rho$ .

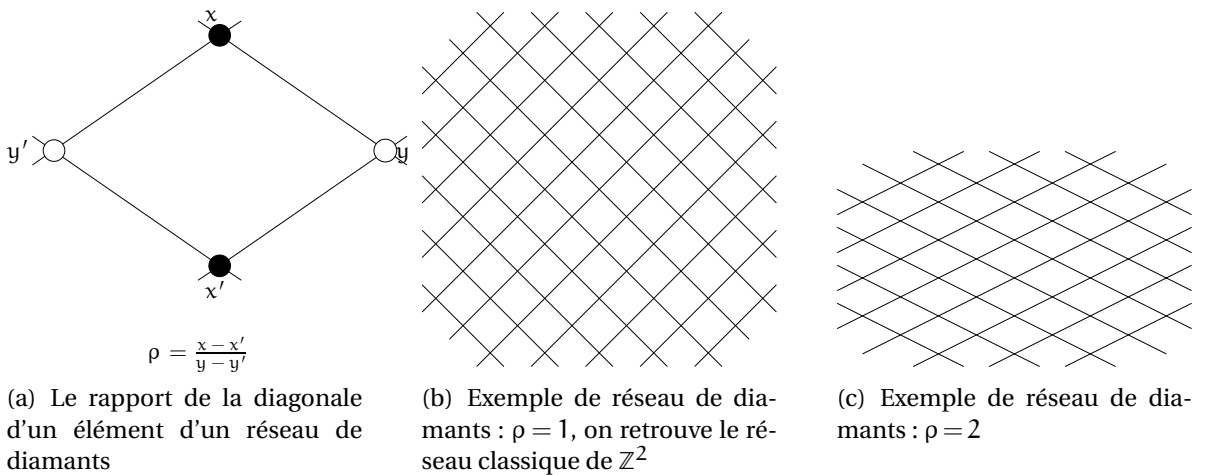


FIGURE 4.23 : Exemple de réseaux de diamants. Figure 4.23(a), on calcule le rapport de la diagonale d'un élément constituant le réseau. Ensuite Figure 4.23(b) et Figure 4.23(b) deux exemples de réseaux pour  $\rho = 1$  et  $\rho = 2$ .

Un réseau de diamants est simplement un réseau écrasé de  $\mathbb{Z}^2$  (Figure 4.23(b) et Figure 4.23(b)). Si  $\rho = 1$  le rapport des diagonales équivaut à dire que le quadrilatère est un carré. On retrouve bien dans ce cas le réseau classique de  $\mathbb{Z}^2$ . Sur ce réseau on définit donc un processus de diffusion de façon analogue à celui déjà introduit.

**Définition 4.6.8** Soit  $\Sigma$  un réseau de diamants de rapport  $\rho$ . On définit sur  $\Sigma$  la chaîne de Markov en temps discret où les états correspondent aux quadrilatères inclus dans  $\Sigma$  et dont les transitions entre deux quadrilatères sont contraintes de la façon suivante :

- Probabilité  $\frac{\rho}{2\rho + \frac{2}{\rho}}$  d'aller du centre du quadrilatère vers les deux coins les plus proches du centre et  $\frac{1}{2\rho + \frac{2}{\rho}}$  vers les deux autres.
- Répartition des marcheurs du coins vers les quadrilatères adjacents pondéré par la distance  $\rho$  ou 1.

Les probabilités de diffusion sont calculées de la façon suivante. Un diamant peut-être vu comme un pixel écrasé. Partant du centre de la face d'un quadrilatère de rapport de diagonale égal à  $\rho$ , il y a deux points  $\rho$  fois plus proche du centre que les deux autres, dans la Figure 4.23(a), cela correspond au point  $x$  et  $x'$ . Les marcheurs vont se répartir sur les coins du quadrilatère en tenant compte de ce rapport,  $\rho$  fois vers les points  $x$  et  $x'$  et  $\frac{1}{\rho}$  vers les points  $y$  et  $y'$ . Une fois sur le coin du quadrilatère, de la même façon, les centres des quadrilatères adjacents se trouvent à des distances différentes donc la probabilité sera de  $\rho$  fois vers les quadrilatères dont les faces sont les plus proches et  $\frac{1}{\rho}$  vers les autres.

Ce processus de diffusion proposé est anisotrope, il ne dépend que de la direction de propagation des marcheurs sur un réseau, et non pas du réseau lui-même. Si l'on regarde les isovaleurs du processus de diffusion sur un réseau de diamants de rapport  $\rho$ , elles sont situés sur des cercles dont le centre dépendra du point de départ de la diffusion. L'opérateur Laplacien induit par cette diffusion se comporte comme l'opérateur Laplacien usuel.

**Théorème 4.6.9** Soit  $\Sigma$  un réseau de diamants de rapport  $\rho$ , alors l'opérateur Laplacien  $\Delta_\Sigma$  converge vers l'opérateur de Laplace usuel.

**Démonstration :**

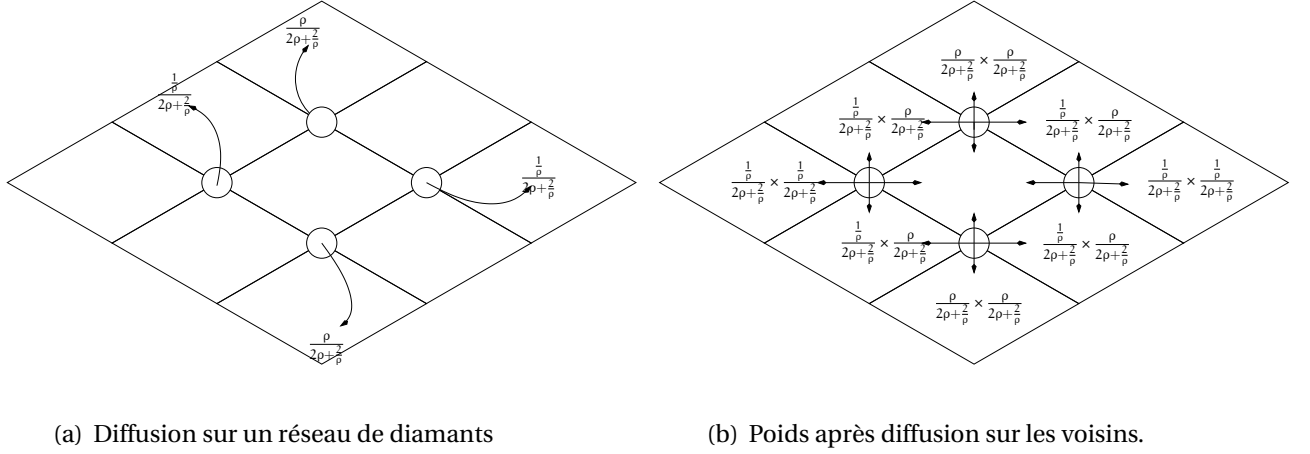
La démonstration utilise les valeurs de la diffusion partant d'un quadrilatère vers son voisinage. Notons ce quadrilatère par les coordonnées de son centre  $(x, y)$  et  $(x_1, x_2)$  et  $(y_1, y_2)$  les quatre coins du quadrilatères tel que :

$$\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = \frac{1}{\rho}$$

Sans perte de généralité, et pour simplifier l'écriture, supposons que  $x_1 - x_2 = 2$  et  $y_1 - y_2 = 2\rho$ .

De cette façon on est en mesure de fournir le 1-voisinage  $V$  du quadrilatère centré en  $(x, y)$ , en donnant les coordonnées des points qui le compose. On a :

$$V = \{(x+\rho, y+1), (x-\rho, y+1), (x, y+2), (x+2\rho, y), (x-\rho, y-1), (x, y-2), (x-2\rho, y), (x+\rho, y-1)\}.$$



(a) Diffusion sur un réseau de diamants

(b) Poids après diffusion sur les voisins.

FIGURE 4.24 : Illustration de la diffusion sur un réseau de diamants. Pour un voisinage  $V$  on a les poids pour chaque voisins suivants

Supposons maintenant la 1-diffusion partant du point  $(x, y)$ , c'est-à-dire la marche aléatoire en une étape partant de  $(x, y)$  (voir Figure 4.24). Seuls les voisins  $V$  sont concernés par cette diffusion. Notons  $p = \frac{\rho}{2\rho+\frac{2}{\rho}}$  et  $q = \frac{1}{2\rho+\frac{2}{\rho}}$  les probabilités de transitions intermédiaires. On a sur le voisinage  $V$  la distribution des marcheurs en fonction de  $\rho$  suivante :  $\{2pq, 2pq, q^2, q^2, 2pq, p^2, p^2, 2pq\}$ .

Calculons maintenant le Laplacien associé à ce voisinage pondéré. Par définition le Laplacien  $\Delta_\Sigma$  appliqué à une fonction  $f$  peut s'écrire :

$$(\Delta_M f)(x) = \sum_{(a,b) \sim (x,y)} \rho((a,b), (x,y)) (f(a,b) - f(x,y))$$

Quand  $(a, b) \sim (x, y)$  avec un rapport d'échelle  $\delta$  :

$$\begin{aligned} f(a, b) = & f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}(x)(x-a) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}(x)(y-b) + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}(x)(x-a)(y-b) \\ & + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}(x)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}(x)(y-b)^2 + o(|x-a|^2 + |y-b|^2). \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned}
(\Delta_M f)(x) &= \sum_{(a,b) \in (x,y)} \rho((a,b), (x,y)) \left( \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}(x)(x-a) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}(x)(y-b) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}(x)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}(x)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}(x)(y-b)^2 \right. \\
&\quad \left. + o(|x-a|^2 + |y-b|^2) \right), \\
&= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}(x)(q^2(2\rho-2\rho) + 2pq(\rho+\rho-\rho-\rho))\delta \\
&\quad + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}(x)(p^2(2-2) + 2pq(1+1-1-1))\delta \\
&\quad + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}(x)(p^2(2\rho-2\rho) + 2pq(\rho+\rho-\rho-\rho))\delta^2 \\
&\quad + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}(x)(8q^2\rho^2 + 2pq(\rho^2+\rho^2+\rho^2+\rho^2))\delta^2 \\
&\quad + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}(x)(p^2(4+4) + 2pq(1+1+1+1))\delta^2 + o(\delta^2), \\
&= 0 + 0 + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}(x)(8q^2\rho^2 + 8pq\rho^2)\delta^2 + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}(x)(8p^2 + 8pq)\delta^2 + o(\delta^2) \\
&= 8 \left( \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}(x) \left( \frac{1+\rho^2}{2\rho+\frac{2}{\rho}} \right) + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}(x) \left( \frac{1+\rho^2}{2\rho+\frac{2}{\rho}} \right) \right) \delta^2 + o(\delta^2) \\
(\Delta_M f)(x) &= \frac{8(1+\rho^2)}{2\rho+\frac{2}{\rho}} \left( \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}(x) + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}(x) \right) \delta^2 + o(\delta^2) \tag{4.43}
\end{aligned}$$

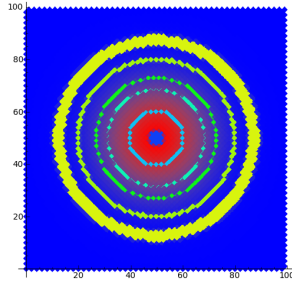
□

## 4.7 Convergence vers l'opérateur usuel sur une surface quelconque

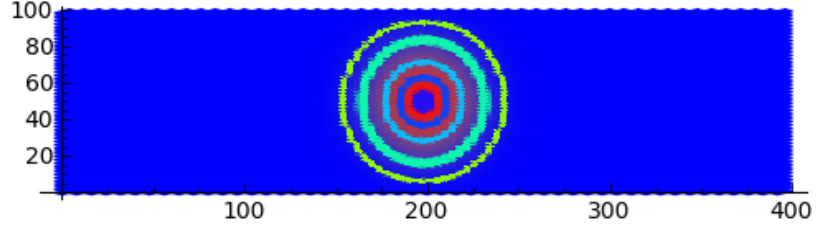
### 4.7.1 Surfaces conformes

L'opérateur Laplacien que l'on vient d'introduire, est relié à une discrétisation du Laplacien sur une surface conforme. Cette discrétisation a été particulièrement étudiée par Christian Mercat dans [Mer01]. Pour comprendre le lien qui existe entre cette structure et





(a) Exemple de diffusion sur un réseau avec  $\rho = 1$  : les isovaleurs sont données par les nombres gaussien.



(b) Exemple de diffusion sur un réseau avec  $\rho = 4$  : Les isovaleurs sont encore des cercles

FIGURE 4.25 : Illustration du Théorème 4.6.9. Sur un réseau de diamants avec  $\rho = 1$  Figure 4.25(a), les isovaleurs (en couleurs) sont données par les nombres binomiaux. On retrouve donc un résultat très classique. Par contre quand on compresse la grille, Figure 4.25(b), on retrouve encore des cercles pour les isovaleurs.

le processus de diffusion adaptatif, faisons quelques brefs rappels des définitions d'une structure conforme.

Soit  $\Sigma$  un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^3$ . On appelle surfels, chaque face d'un voxel de  $\Sigma$ . Contrairement au Laplacien proposé dans les chapitres précédents, une structure conforme est définie à partir des surfels d'un voxel. Une surface est constituée de l'ensemble de ses surfels. Soit  $\diamond_0$ ,  $\diamond_1$  et  $\diamond_2$  les ensembles des sommets, arêtes et surfels de la surface  $\Sigma$ . Soit  $\mathcal{N}$  le champs de normales définie sur  $\Sigma$ . A chaque surfel on associe une normale donnée par l'orientation de la surface. Notons  $(x, x', y, y') \in \diamond_0$  les quatre sommets d'un surfel. On projette à l'aide la normale les quatre sommets du surfel sur le plan tangent à la normale. Chaque surfel carré se retrouve déformé en un parallélogramme dans le plan tangent, comme on peut le voir Figure 4.26.

Les diagonales ne sont plus nécessairement orthogonales. On appelle  $\theta$  l'angle formé par les diagonales du quadrilatère  $(x, x', y, y')$  (voir Figure 4.27(a)). Chaque quadrilatère peut être donc identifié au rapport de la diagonale :

$$\frac{x' - x}{y - y'} = i\rho \quad (4.44)$$

Chaque surfel est désormais pondéré par la valeur du rapport des diagonales. De cette façon, on peut définir un opérateur Laplacien discret qui tient compte de ces poids :

$$(\Delta f)(v) = \sum_{v' \sim v} \rho(v, v') (f(v) - f(v')) \quad (4.45)$$



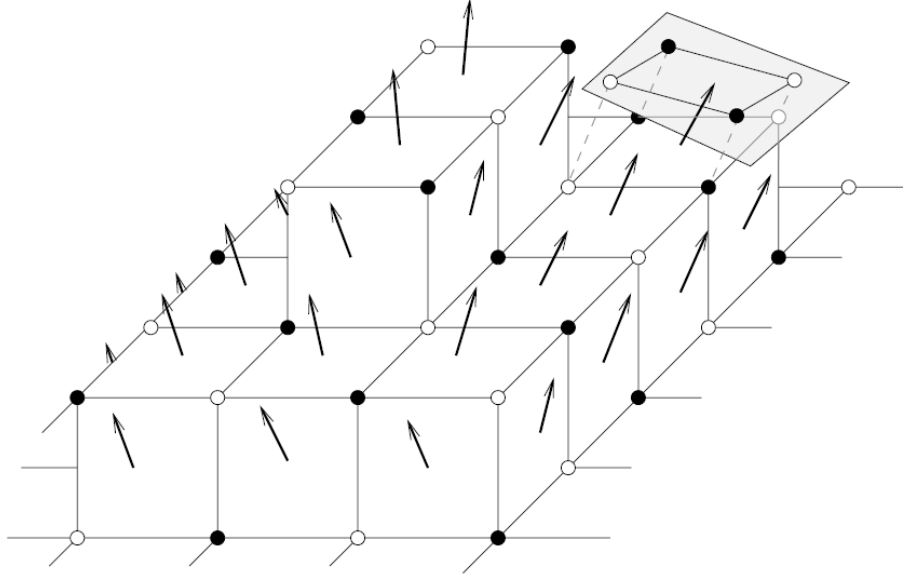


FIGURE 4.26 : Un ensemble de voxels  $\Sigma$  muni de ces normales. On projette chaque surfel dans le plan tangent.

#### 4.7.2 Opérateur Laplacien et diffusion sur une surface conforme

Pour faire le lien avec le processus de diffusion adaptatif, voyons l'opérateur Laplacien, défini par la donnée des rapports de la diagonale, comme un processus de diffusion (Figure 4.27(b)). Soit  $p(v, v')$  la probabilité de transition d'un surfel  $v$  vers un surfel  $v'$  :

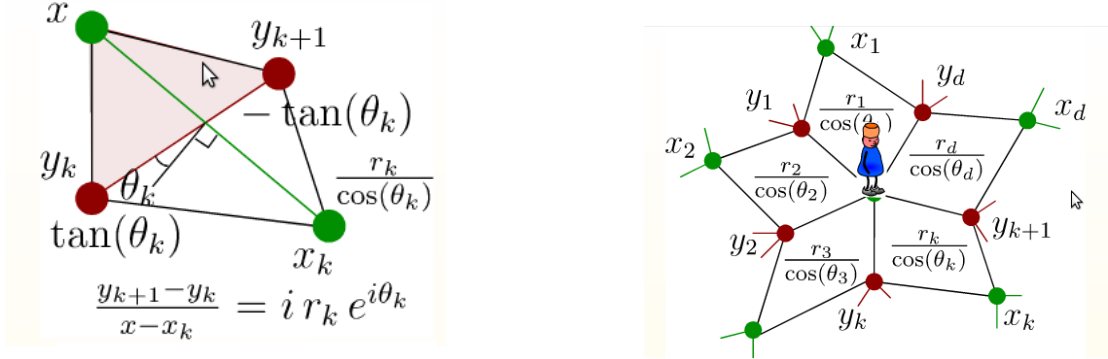
$$p(v, v') = \frac{\rho(v, v')}{\sum_{u \sim v} \rho(u, v)} \quad (4.46)$$

Soit  $(v_1, v_2, v_V)$  le voisinage d'un point  $v$ . La probabilité de diffusion  $h(v)$  partant d'un point  $v$  s'écrit comme la probabilité de transition de  $v$  vers tous les points du voisinage :

$$h(v) = \sum_{i=1}^V p(v, v_i) h(v_i) \quad (4.47)$$

$$= \sum_{i=1}^V \frac{\rho(v, v_i)}{\sum_{k=1}^V \rho(v, v_k)} h(v_i) \quad (4.48)$$

On retrouve la formule proposée Équation 4.45 :



(a) Calcul du rapport des diagonales pour un quadrilatère quelconque

(b) Attraction de chaque surfel après la transition via un sommet

FIGURE 4.27 : Illustration du processus de diffusion sur une structure conforme.

$$(\Delta h)(v) = \sum_{v' \sim v} \rho(v, v') (h(v) - h(v')) \quad (4.49)$$

Nous avons introduit dans le chapitre précédent un processus de diffusion tenant compte du rapport des diagonales d'un quadrilatère sur un réseau régulier. Néanmoins, ce processus s'étend naturellement à tout type de surfaces. Sur les réseaux de diamants nous avons montré la convergence de cet opérateur sur des surfaces régulières mais avec des quadrilatères dont le rapport des diagonales est réel. Dans le cas d'une structure conforme, le rapport des diagonales est a priori, complexe. On peut toutefois montrer que le processus de diffusion adaptatifs est une généralisation de ce processus sur une structure conforme.

**Définition 4.7.1** Soit  $\Sigma$  une surface conforme. On définit sur  $\Sigma$  la chaîne de Markov en temps discret où les états correspondent aux quadrilatères inclus dans  $\Sigma$  et dont les transitions entre deux quadrilatères  $X_i$  et  $X_j$  sont contraintes de la façon suivante :

- Probabilité  $\frac{\rho_i}{2\rho_i + \frac{2}{\rho_i}}$  d'aller du centre du quadrilatère vers les deux coins les plus proches du centre et  $\frac{1}{2\rho_i + \frac{2}{\rho_i}}$  vers les deux autres.
- Répartition des marcheurs du coins vers les quadrilatères adjacent pondéré par la distance  $\rho_k$  or 1.

Les probabilités de transition sont identiques à celles proposées Définition 4.6.8. Soit deux surfels  $X_i$  et  $X_j$ , les probabilités de transition de  $X_i$  vers  $X_j$  sont contraintes par le

rapport de la diagonale du surfel  $X_i$  donnée par  $\rho_i$  et du rapport de la diagonale du surfel  $X_j$  donnée par  $\rho_j$ .

On a donc que la probabilité d'aller de  $X_i$  vers  $X_j$  est :

$$p(X_i, X_j) = \frac{\rho_i}{2\rho_i + \frac{2}{\rho_i}} \times \frac{\rho_j}{2\rho_j + \frac{2}{\rho_j}} \quad (4.50)$$

On pose  $\rho_k = \frac{r_k}{\cos(\theta_k)}$

On a alors :

$$p(X_i, X_j) = \frac{r_i r_j}{\cos(\theta_i) \left[ 2 \frac{r_i}{\cos(\theta_i)} + \frac{2 \cos(\theta_i)}{r_i} \right] \cos(\theta_j) \left[ 2 \frac{r_j}{\cos(\theta_j)} + \frac{2 \cos(\theta_j)}{r_j} \right]} \quad (4.51)$$

$$= \frac{r_i r_j}{\left[ 2r_i + \frac{2 \cos^2(\theta_i)}{r_i} \right] \left[ 2r_j + \frac{2 \cos^2(\theta_j)}{r_j} \right]} \quad (4.52)$$

De la même façon, traduisons l'équation de transition 4.46 : posons  $\rho(v, v') = \frac{r_v}{\cos(\theta_v)}$ . La probabilité d'aller de  $v$  vers  $v'$  est donc :

$$p(v, v') = \frac{\frac{r_v}{\cos(\theta_v)}}{\sum_{v_k \sim v} \rho(v, v_k)} \times \frac{\frac{r_{v'}}{\cos(\theta_{v'})}}{\sum_{v_k \sim v'} \rho(v', v_k)} \quad (4.53)$$

$$= \frac{r_v r_{v'}}{\cos(\theta_v) \left[ 2 \frac{r_v}{\cos(\theta_v)} + \frac{2 \cos(\theta_v)}{r_v} \right] \cos(\theta_{v'}) \left[ 2 \frac{r_{v'}}{\cos(\theta_{v'})} + \frac{2 \cos(\theta_{v'})}{r_{v'}} \right]} \quad (4.54)$$

$$= \frac{r_v r_{v'}}{\left[ 2r_v + \frac{2 \cos^2(\theta_v)}{r_v} \right] \left[ 2r_{v'} + \frac{2 \cos^2(\theta_{v'})}{r_{v'}} \right]} \quad (4.55)$$

Le processus de diffusion défini sur des pixels peut se généraliser comme un processus de diffusion sur une surface en tenant compte du rapport de la diagonale. On entrevoit ainsi un lien entre les estimateurs de courbure et l'opérateur Laplacien défini sur des surfaces conformes et l'opérateur Laplacien défini à partir du processus de diffusion purement discret, ce qui nous permettraient de prouver que notre définition du Laplacien converge vers le Laplacien usuel ce qui est le cas de la définition sur des surfaces conformes.

# Application du processus de Diffusion discret à l'estimation de la courbure

Le cercle est le plus long chemin  
d'un point au même point.

TOM STOPPARD

## Préambule

*Dans ce chapitre, on applique le processus de diffusion discret introduit dans les chapitres précédents, à l'étude des tangentes et de la courbure de fonctions discrètes. On propose une méthode d'estimation sur le même principe que la convolution binomiale, mais avec des poids adaptés à la géométrie de la courbe.*

## Contents

5.1	Introduction . . . . .	88
5.2	Courbure de graphes de fonctions réelles . . . . .	89
5.3	Estimation des dérivées . . . . .	93
5.4	Application à l'estimation de la courbure . . . . .	106
5.5	Détection de bruit dans un contour . . . . .	115
5.6	Conclusion . . . . .	117

## 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous appliquons le processus de diffusion discret pour étudier deux caractéristiques importantes des courbes discrètes : les tangentes et la courbure. Dans le chapitre d'introduction, nous avons présenté de nombreuses méthodes basées principalement sur la détection et la reconnaissance de segments discrets définis comme des tangentes discrètes. Nous avons conclu le chapitre par deux méthodes différentes qui utilisent des masques de convolution pour obtenir des estimateurs résistant au bruit, et qui se révèlent être multigrille convergent, dans le cas des courbes dans le plan  $\mathbb{Z}^2$ . Les propriétés intéressantes des processus de diffusion et la pertinence des méthodes par convolutions binomiales nous ont poussé à construire des masques de convolution dont les poids seraient donnés par les temps passés par un marcheur sur chaque pixel de la courbe, connaissant son point de départ. Étant donné un point de cette courbe, les temps de diffusion de ce point vers les autres nous donnent une information sur la géométrie de la courbe. Les méthodes par convolution n'offrent pas cette possibilité, puisque les masques de convolution utilisés sont les mêmes en tout point. Ils ne tiennent pas compte des points géométriques importants de la courbe, comme par exemple les points de forte courbure ou de courbure négative. Or on voudrait que, grâce à ces points clés, les masques utilisés soient différents en terme de taille ou de poids.

L'opérateur Laplacien induit par la diffusion, donne des caractéristiques importantes de la surface. Les masques de convolution obtenus à partir de ce Laplacien sont donc pertinents dans le sens où la diffusion sur la courbe tient compte de la courbe elle-même. Nous proposons d'étudier une méthode similaire à celle proposée par Remy Malgouyres, Florent Brunet et Sébastien Fourey [FM08] pour des graphes de fonction, en utilisant des masques adaptés à la géométrie. Plus un marcheur aura de difficulté à atteindre certains points de la courbe, moins ces points auront d'importance dans le calcul de la tangente. Ainsi pour un point de forte courbure, les marcheurs vont rester emprisonnés dans le secteur où la courbure sera maximale. Le masque sera donc clairement très différent d'un point où la courbure sera quasi nulle. À partir de ces différentes considérations, nous avons proposé deux méthodes différentes pour estimer les tangentes discrètes. La première est reliée à la reconnaissance de segments discrets et la seconde basée sur la convolution et la méthode des différences finies. Le chapitre se compose donc de la façon suivante :

- Dans un premier temps, nous proposons une introduction au calcul de la courbure pour des graphes de fonctions réelles. On propose une approche géométrique ainsi que les diverses formules qui permettent de calculer la courbure pour des fonctions quels que soient leurs systèmes de coordonnées.
- Ensuite, nous proposerons un bref rappel des méthodes d'estimations des tangentes réelles, par la méthode des différences finies ou celle des moindres carrés. Nous in-

troduirons ainsi les deux méthodes pour estimer les tangentes discrètes basées sur le processus de diffusion adaptatif.

- Nous verrons comment ces méthodes sont reliées à la méthode par convolution binomiale de Remy Malgouyres, Sébastien Fourey et Florent Brunet pour des graphes de fonctions. Par la suite, on montrera qu'à partir d'un certain ordre, les deux méthodes sont équivalentes. De cette façon, on pourra en conclure la convergence multigrille de notre méthode.
- Enfin nous étendrons la méthode d'estimation des dérivées, basées sur les différences finies pour calculer les dérivées d'ordres supérieurs. L'application des formules précédemment introduites pour le calcul de la courbure des fonctions réelles donnera un estimateur de courbure de fonctions discrètes.

## 5.2 Courbure de graphes de fonctions réelles

A titre d'introduction, nous rappelons des notions de courbure. Il s'agit simplement de définir ce qu'est la courbure d'un arc et d'en donner une approche géométrique. Nous donnerons leurs formules fermées pour des graphes de fonctions et des fonctions paramétrées. De cette façon nous pourrons utiliser certaines de ces formules pour donner un équivalent discret de la courbure d'une fonction discrète.

### 5.2.1 Courbure géométrique

Pour calculer la courbure d'un arc paramétré, donnons tout d'abord une interprétation géométrique de la courbure. Soit  $P$  un mobile qui se déplace sur un plan euclidien. La position du mobile varie en fonction du temps  $t$ . Notons  $M(t) = (x(t), y(t))$  les coordonnées du point  $P$  au temps  $t$ .  $t \mapsto x(t)$  et  $t \mapsto y(t)$  sont supposées de classe  $\mathcal{C}^2$ . Les données des fonctions  $t \mapsto x(t)$  et  $t \mapsto y(t)$  et de l'origine du repère, donnent en tout temps  $t$  la position du mobile dans le plan.

Par dérivation du vecteur  $\overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ , notons la vitesse  $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$  et l'accélération  $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix}$

La norme du vecteur  $\overrightarrow{v}$  représente la vitesse du mobile, dont la direction est donnée par la tangente à la courbe et le sens par la future position du point  $P$ . Le vecteur  $\overrightarrow{a}$  représente l'accélération du mobile dont les composantes sont l'accélération tangentielle et l'accélération normale. L'accélération normale détermine à quelle vitesse le mobile va tourner dans la direction tangentielle et caractérise la manière dont le mobile tourne.

#### Définition 5.2.1 Courbure

Soit  $P(s)$  une courbe  $\mathcal{C}^2$  paramétrée par son abscisse curviligne  $s$ . Soit  $\overrightarrow{T}(s)$  le vecteur tan-

gent au point d'abscisse  $s$  et  $\vec{N}(s)$  le vecteur normal. Alors la courbure en un point est le réel  $c$  tel que :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = c\vec{N}$$

On appelle rayon de courbure la valeur  $R = \frac{1}{c}$

Soit  $O$  un point se trouvant sur la normale  $\vec{N}$ . Le cercle de centre  $O$  au point  $P$  est tangent à la courbe. Mais en fonction du point  $O$  choisi, les cercles seront «plus ou moins» tangents. Par exemple Figure. 5.1, des deux cercles, seul un épouse mieux la forme de la courbe. Plus le point  $O$  sera proche de  $P$  plus le cercle sera vers l'intérieur de la courbe. Plus le point  $O$  sera éloigné du point  $P$ , plus le cercle sera situé à l'extérieur de la courbe. Le cercle limite situé au plus proche de la courbe, s'appelle le cercle osculateur.

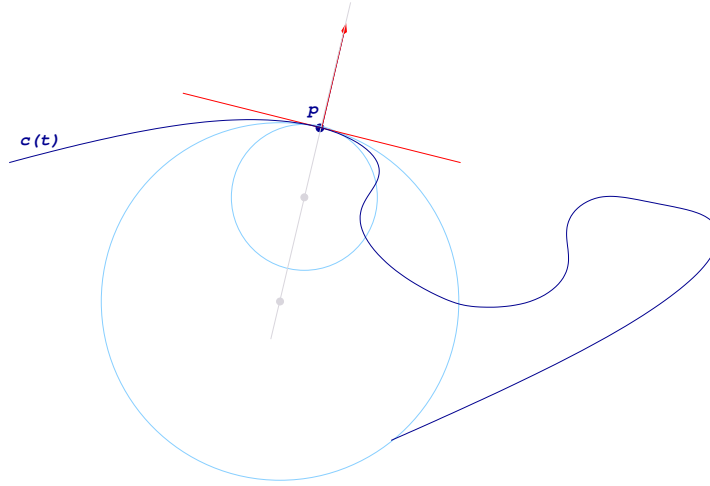


FIGURE 5.1 : Exemple de cercles situés sur la normale au point  $P$ .

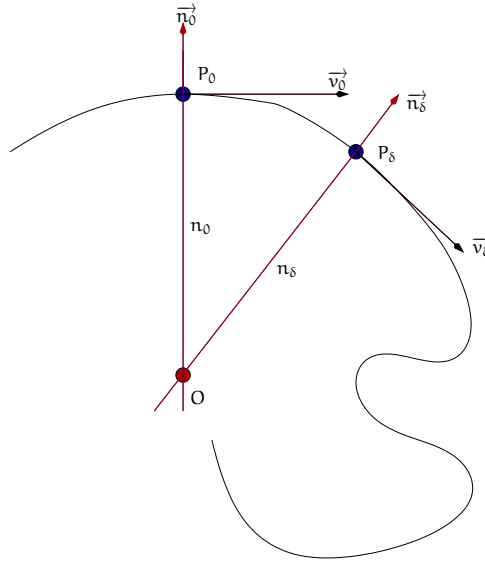
### Définition 5.2.2 Cercle osculateur

Le cercle osculateur est le cercle dont le centre est le point  $O$  situé sur la normale et tel que  $\vec{PO} = R\vec{N}$

### 5.2.2 Détermination du cercle osculateur

Notons  $P_0$ ,  $v_0$  et  $a_0$ , la position, la vitesse et l'accélération du mobile au temps  $t_0$ . De la même façon, notons  $P_\delta$ ,  $v_\delta$  et  $a_\delta$  la position, la vitesse et l'accélération au temps  $t_\delta = t_0 + \Delta t$ . Notons  $n_0$  le vecteur unitaire normal au point  $P_0$ .

Supposons par exemple que les points  $P_0$  et  $P_\delta$  se trouvent sur un arc de cercle. Alors, le centre du cercle osculateur se trouve à l'intersection entre les deux normales (Figure. 5.2).

FIGURE 5.2 : Calcul du cercle osculateur au point  $P_0$ 

Dans le cas général, notons  $\vec{n}_0$  et  $\vec{n}_\delta$  les vecteurs normaux à la courbe aux points  $P_0$  et  $P_\delta$ , et  $C$  le centre du cercle osculateur recherché.

On a les deux conditions suivantes :

$$\forall P \in \vec{n}_0 : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + m\vec{n}_0 \quad (5.1)$$

et

$$\forall P \in \vec{n}_\delta : \overrightarrow{P_\delta P} \cdot \vec{n}_\delta = 0 \quad (5.2)$$

En calculant l'intersection des deux normales, on cherche la valeur du paramètre  $m$  qui atteint le centre du cercle  $C$  :

$$m = \frac{\overrightarrow{P_0 P_\delta} \cdot \vec{n}_\delta}{\vec{n}_0 \cdot \vec{v}_\delta} \quad (5.3)$$

Par passage à la limite, quand  $\Delta t \rightarrow 0$ , le point  $C$  devient le centre du cercle osculateur et  $m$  est le rayon de ce cercle.

$$\overrightarrow{P_0 P_\delta} = \Delta t \cdot \vec{v}_0 + o(|t|) \quad (5.4)$$

$$\vec{v}_\delta = \vec{v}_0 + \Delta t \cdot \vec{a}_0 + o(|t|) \quad (5.5)$$



En remplaçant dans les équations 5.1 et 5.2, on obtient le rayon R du cercle :

$$R = \frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0}{|\vec{a}_0 \cdot \vec{n}_0|} \quad (5.6)$$

et son centre  $C_0$  :

$$\overrightarrow{OC_0} = \overrightarrow{OP_0} + R \cdot \vec{n}_0 \quad (5.7)$$

### 5.2.3 Courbure de fonctions paramétriques

A partir des considérations précédentes, on étudie la courbure d'un graphe de fonction en tout point de la courbe. Dans le cas où :

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

nous avons :

$$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

On obtient le rayon R :

$$R = \frac{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{\frac{3}{2}}}{\begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \ddot{x}(t) \\ \dot{y}(t) & \ddot{y}(t) \end{vmatrix}}} \quad (5.10)$$

et le centre du cercle C :

$$C := \begin{cases} X = x - \dot{y} \frac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{\begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \ddot{x}(t) \\ \dot{y}(t) & \ddot{y}(t) \end{vmatrix}} \\ Y = y + \dot{x} \frac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{\begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \ddot{x}(t) \\ \dot{y}(t) & \ddot{y}(t) \end{vmatrix}} \end{cases}$$

En simplifiant, on obtient la formule de la courbure en tout point pour une courbe paramétrique :

$$c = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{\frac{3}{2}}} \quad (5.11)$$

#### 5.2.4 Courbure de fonctions paramétriques polaires

Supposons que la fonction  $M(t)$  soit donnée par ses coordonnées polaires paramétrées, c'est-à-dire  $M(t) = (\rho(t), \theta(t))$ , en appliquant la formule précédente on obtient la courbure en tout point de la courbe :

$$c = \frac{\rho(t)\dot{\rho}(t)\ddot{\theta}(t) + 2\dot{\rho}(t)^2\dot{\theta}(t) - \rho(t)\ddot{\rho}(t)\dot{\theta}(t) + \rho(t)^2\dot{\theta}(t)^3}{(\dot{\rho}^2(t) + \rho(t)^2\dot{\theta}^2(t))^{\frac{3}{2}}} \quad (5.12)$$

#### 5.2.5 Courbure de fonctions polaires

Supposons que la courbe soit uniquement paramétrée en coordonnées polaires  $M(t) = \rho(\theta)$ , on a alors la formule plus simple suivante :

$$c = \frac{2\dot{\rho}^2(\theta) - \rho(\theta)^2 - \rho(\theta)\ddot{\rho}(\theta)}{(\dot{\rho}^2(\theta) + \rho(\theta)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.13)$$

#### 5.2.6 Courbure des graphes de fonctions

Pour les graphes de fonctions,  $y = f(x)$  on obtient la formule de la courbure en tout point :

$$c = \frac{\ddot{y}(x)}{(1 + \dot{y}(x)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.14)$$

### 5.3 Estimation des dérivées

Les formules données précédemment tiennent compte de la paramétrisation de la courbe ainsi que d'une estimation des dérivées premières et secondes. Plusieurs approches ont déjà été proposées pour obtenir une estimation des tangentes d'une courbe, par la segmentation ou par la convolution. L'approche par segmentation ne permet pas

une estimation de la dérivée seconde, mais permet de donner une estimation de la courbure en fonction de la variation de la pente des segments discrets du contour. D'autres approches basées sur la reconnaissance du cercle osculateur discret donnent une approximation directe de la courbure, tout comme la décomposition du contour par des arcs de cercle proposé par Tristan Roussillon. Nous avons favorisé celle utilisant la convolution proposée par Worst et Smeulders avec des noyaux gaussiens, puis particulièrement étudiée par Florent Brunet Sébastien Fourey et Remy Malgouyres. Elle donne une estimation des dérivées d'ordre  $n$  avec  $n > 0$ . L'inconvénient avec cette méthode, ce sont les erreurs d'approximation successives qui se cumulent et finalement l'estimation des dérivées pour un ordre assez grand est assez mauvais. Cependant, dans le cas de courbe discrète dont on veut une estimation de la courbure, l'estimation des dérivées premières et secondes est particulièrement efficace. Cette efficacité est démontrée par la convergence quand le pas de la grille de discrétisation tend vers 0. Nous proposons dans cette partie d'étudier une approche similaire basée sur les processus de diffusion. L'idée est d'injecter l'information géométrique obtenue par la diffusion dans l'estimation des dérivées premières et secondes pour le calcul de la courbure.

### 5.3.1 Méthode des différences finies

A titre d'introduction, nous proposons de rappeler les principes de base de l'estimation numérique des dérivées d'une fonction.

**Définition 5.3.1** Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles définie sur une réunion quelconque d'intervalles non triviaux  $\mathcal{D}_f$  et soit  $x_0 \in \mathcal{D}_f$ . Pour tout  $h \in \mathbb{R}^*$  tel que  $[x_0, x_0 + h] \subset \mathcal{D}_f$ , on appelle taux d'accroissement de  $f$  en  $x_0$  avec un pas de  $h$  la valeur :

$$t_{x_0}(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

On dit que  $f$  est dérivable en  $x_0$  si la limite quand  $h$  tend vers 0 de  $t_{x_0}(h)$  existe. On a :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} t_{x_0}(h)$$

La définition de la dérivée en terme de limite est inopérante en informatique. En effet comment calculer la limite quand  $h$  tend vers 0 d'une courbe quelconque.

### Théorème 5.3.2 Développement de Taylor

Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle et  $a \in I$ ,  $E$  un espace vectoriel normé de dimension fini et soit  $f$  une fonction dérivable en  $a$  jusqu'à l'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors on a le développement de la fonction  $f$  :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \quad (5.15)$$

avec  $R_n(x)$  le reste de Taylor

De la formule de Taylor on déduit une approximation de la dérivée première :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(a) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(a) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(a) + o(h^5) \quad (5.16)$$

$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(a) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(a) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(a) + o(h^5) \quad (5.17)$$

En soustrayant l'équation 5.17 à l'équation 5.16, on obtient l'équation :

$$f(a+h) - f(a-h) = 2hf'(a) + 2\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(a) + o(h^4) \quad (5.18)$$

On obtient une estimation de la dérivée d'ordre 1 :

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} + \frac{h^2}{2.3!}f^{(3)}(a) + o(h^3) \quad (5.19)$$

En additionnant les équations 5.17 et 5.16, on obtient une estimation de la dérivée seconde :

$$f''(a) \sim \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} \quad (5.20)$$

### 5.3.2 Produit de convolution

On déduit des équations précédentes trois masques de convolution classiques pour approcher la dérivée d'une fonction (Tableau. 5.3). Ces masques sont obtenus à partir d'équations similaires à celle présentée Équation. 5.19. Dans le développement de Taylor Équation. 5.17 et Equation. 5.16, on a fait le choix d'un développement centré sur l'intervalle  $[-h, h]$  ce qui donne la formule de l'estimation de la dérivée 5.19. On peut effectuer un raisonnement similaire vers l'avant avec un développement sur l'intervalle  $[0, h]$  qui donnera une formule légèrement différente ou vers l'arrière pour obtenir un troisième masque. Ces masques sont ceux présentés dans le tableau ci-contre 5.3.

Cette première approche est développée en utilisant un noyau gaussien pour améliorer l'estimation des dérivées successives. La méthode basique utilise uniquement deux points pour donner une estimation de la dérivée avec un poids de un. Cependant on peut utiliser un voisinage plus large autour d'un point tout en tenant compte de leur distance par rapport à ce point, c'est-à-dire qu'un point éloigné aura moins d'importance dans le calcul de la dérivée qu'un point plus proche. La dérivée estimée sera alors la moyenne sur l'ensemble des points. Cette approche a l'avantage d'être fortement résistante au bruit.

Direction d'approximation	Noyau de la convolution
Dérivation centrée	$\delta_0 : \begin{array}{ccccc} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \boxed{\frac{1}{2}} & \boxed{\frac{1}{2}} & \boxed{1} & \boxed{\frac{1}{2}} & \boxed{\frac{1}{2}} \end{array} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ $a \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } a = -1 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Dérivation avant	$\delta_+ : \begin{array}{cccc} & & 1 & -1 \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{array}$ $a \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a = -1 \\ -1 & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Dérivation arrière	$\delta_- : \begin{array}{cccc} 1 & -1 & & \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{array}$ $a \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a = -1 \\ -1 & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

FIGURE 5.3 : Masques de convolution associé à l'estimation de la dérivée

Cependant en utilisant un noyau gaussien, on peut se poser la question sur la pertinence de mettre le même poids quelle que soit la position d'un point sur la courbe. Par exemple, pour un point situé sur une zone de forte courbure, on souhaiterait que les poids soient différents par rapport à une zone de courbure nulle. On propose une approche utilisant le processus de diffusion présenté dans le Chapitre. 4. Soit  $\varphi$  une fonction discrète, et  $x$  un point de la courbe où l'on veut estimer la dérivée. La géométrie de la courbe est donnée par les contraintes de déplacement d'un marcheur qui part d'un point  $x$ . La longueur du voisinage utilisée sera donnée par le point le plus loin atteint par le marcheur.

**Définition 5.3.3** *Estimation de la dérivée*

Soit  $\varphi$  une fonction discrète et  $A_s^m$  la matrice de transition sur la courbe  $\varphi$ . Une estimation de la dérivée première de la fonction  $\varphi$  au point  $n$  est donnée par :

$$(D_{(2m+1)}^1 * \varphi)(n) = \sum_{i=-m}^m A_s^m(n, i) (\varphi(n+i+1) - \varphi(n-1+i)) \quad (5.21)$$

La définition est similaire à celle avec le noyau Gaussien (Chapitre. 3). La différence principale réside dans le choix d'un noyau adapté à la géométrie de la courbe. L'étude que nous avons faite sur le noyau adaptatif dans le cadre des étoiles discrètes (Chapitre. 4),

montrait que la diffusion avait un sens géométrique. Il est facile de remarquer qu'un point de bruit détaché de la courbe aura un poids nul et n'interviendra pas dans l'estimation de la dérivée, contrairement aux poids gaussiens qui ne tiennent compte que de l'abscisse de ce point. Sur des zones de fortes courbures, les poids seront supérieurs au maximum de la courbure et très faibles au-delà. On préserve ainsi de façon plus précise les maxima de la fonction. C'est une différence flagrante avec la méthode de reconnaissance des segments maximaux. Autant les poids gaussiens ne révèlent aucune information sur le bruit ou sur la géométrie, autant la sensibilité au bruit de la reconnaissance des segments peut s'avérer être particulièrement utile pour détecter des zones marquées. En particulier, les travaux de Bertrand Kerautret et Jacques-Olivier Lachaud [KL09], proposent une étude multi-échelle de la longueur des segments maximaux pour détecter des zones de bruit. Cette caractéristique due à la sensibilité au bruit n'existe pas dans le cas de l'estimation des dérivées avec des noyaux gaussiens puisque celui-ci réduit son intensité sans avoir besoin de le détecter.

**Proposition 5.3.1** [LVdV07]

*Soit  $S$  un support convexe dont le contour est deux fois différentiable et de courbure continue. La longueur discrète d'un segment maximal  $\Delta_h(S)$  avec  $h$  le pas de discrétisation  $h$  n'est pas bornée [des deux côtés] quand  $h$  tend vers 0.*

**Proposition 5.3.2** *La diffusion discrète centrée et normalisée, sur le raffinement d'une courbe de courbure continue, converge en loi vers la loi normale centrée réduite.*

Plus précisément :

**Lemme 5.3.1** *Soit  $f \in \mathcal{C}^2$ , soit  $x \in \mathcal{D}_f$  et  $\sigma_x$  l'écart type de la diffusion sur la droite discrète de pente  $f'(x)$ . Soit  $i_\epsilon$  le point discret associé à  $x$  sur  $\varphi_\epsilon : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  la discrétisée de  $f$  de pas  $\epsilon$ ,  $A_s$  le noyau de convolution associé à  $\varphi_\epsilon$  et  $p_\epsilon$  la longueur du segment maximal centré en  $i_\epsilon$ . Choisissons  $m_\epsilon$  tel que  $\frac{p_\epsilon}{2} > m_\epsilon > \frac{p_\epsilon}{4}$  et notons  $X_\epsilon(y) = \frac{1}{m_\epsilon \sigma_x} A_s^m(i_\epsilon, i_\epsilon + \lfloor \frac{ym_\epsilon \sigma_x}{\epsilon} \rfloor)$ , le processus de diffusion normalisé centré en  $i_\epsilon$ . Alors  $(X_\epsilon)_{\epsilon \in \mathbb{R}}$  converge en loi vers la loi normale centrée réduite :*

$$X_\epsilon \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

**Remarque.** Cette proposition traduit le fait que le comportement asymptotique du processus de diffusion pour une diffusion suffisamment longue, est similaire à une loi normale à un écart type près. Ce qui signifie que pour un  $m$  suffisamment grand, les poids du processus de diffusion sont donnés par les nombres binomiaux normalisés dont l'écart type a été réduit. Une telle considération sur les supports réguliers a déjà été faite (Chapitre. 4). Sur les droites, on a démontré que les poids suivaient une loi normale quand  $m \rightarrow \infty$ . Les conditions sur la fonction  $f$ , nous permettent d'élargir ce résultat au cas des fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$ , bornées.

**Démonstration :**

Le point de départ de la diffusion  $i_\epsilon$  appartient à  $S$ , le segment maximal centré en  $i_\epsilon$  et de longueur  $p_\epsilon$ . La distribution statistique des poids partant du point  $i_\epsilon$  a un écart type que l'on note  $\sigma_\epsilon$ . Comme  $f \in \mathcal{C}^2$ ,  $\sigma_\epsilon$  converge vers  $\sigma_x$  l'écart type de la diffusion sur la droite discrète de pente  $f'(x)$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Pour  $j$  tel que  $|i_\epsilon - j| < p_\epsilon$ , le processus de diffusion entre  $i_\epsilon$  et  $j$  pour un temps  $m < p_\epsilon$  est identique au processus sur la droite discrète  $S$ .

D'après le Théorème. 4.4.7, le processus de diffusion centré et normalisé sur la droite discrète de support  $S$  converge en loi vers la loi normale quand  $m$  tend vers  $\infty$ . Et d'après la Proposition. 5.3.1,  $p_\epsilon$  est non borné quand  $\epsilon \rightarrow 0$ . Donc pour  $\frac{p_\epsilon}{2} > m_\epsilon > \frac{p_\epsilon}{4}$ ,

$$X_\epsilon \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

□

Cette proposition nous permet de démontrer la convergence multigrille de notre méthode en utilisant le résultat de convergence de Alex Esbelin et Remy Malgouyres. En effet, il est a priori difficile de caractériser les poids du processus de diffusion puisqu'ils se veulent adaptatifs. Les poids dépendent donc à la fois du support et de la position sur celui-ci. C'est ce qui rend la preuve de convergence sur les droites discrètes si particulière : même sur un support aussi régulier qu'une droite, la diffusion tient compte des changements de paliers liés à la discrétisation de la droite. On contrecarre ce problème en étudiant le comportement asymptotique des poids sur une courbe. Le résultat montre que la distribution est comparable aux nombres binomiaux. Le processus de diffusion tient compte de la géométrie mais pour un masque très large le comportement est similaire à une loi normale. Il dépend de l'écart type  $\sigma$  compris entre 0 et 1, qui recentre ou élargit la gaussienne en fonction de la courbe. Si  $\sigma = 1$ , on retrouve exactement les nombres binomiaux, c'est-à-dire que l'on est dans la situation de diffusion la plus rapide.

**Théorème 5.3.4** [EM09]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\mathcal{C}^3$  et bornée, soit  $\alpha \in ]0, 1]$ ,  $K \in \mathbb{R}_+^*$  et  $h \in \mathbb{R}_+^*$ . Supposons que  $\Gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  telle que  $|h\Gamma(i) - f(hi)| \leq Kh^\alpha$ . Alors pour  $m = h^{2(\alpha-3)/3}$  on a  $|(D_{2m-1} * u)(n) - f'(nh)| \in O(h^{2\alpha/3})$

**Remarque.** D'après la Proposition. 5.3.2, on sait que sur une courbe de courbure continue, la distribution des poids des masques adaptatifs converge en loi vers une distribution normale. Or un résultat classique est que les nombres binomiaux peuvent également être approchés par une loi normale. En d'autres termes, pour une taille de masque très large, la convolution utilisant des masques gaussiens est équivalente de la convolution utilisant des masques adaptatifs. On a donc dans notre cas un résultat de convergence similaire au Théorème 5.3.4.

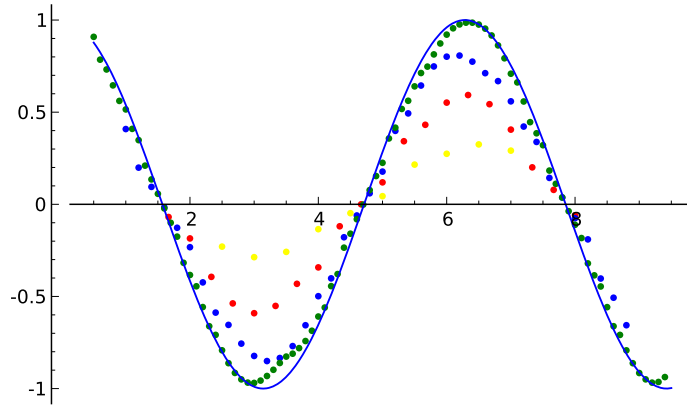


FIGURE 5.4 : Illustration de la convergence de l'estimation de la dérivée seconde de la fonction  $x \mapsto \sin(x)$  (en trait continu). Le pas de discrétisation est réduit de  $h = \frac{1}{2}$  (jaune) vers  $h = \frac{1}{3}$  (rouge),  $h = \frac{1}{5}$  (bleu) et  $h = \frac{1}{10}$  (vert), pour un masque de taille fixé égal à 20

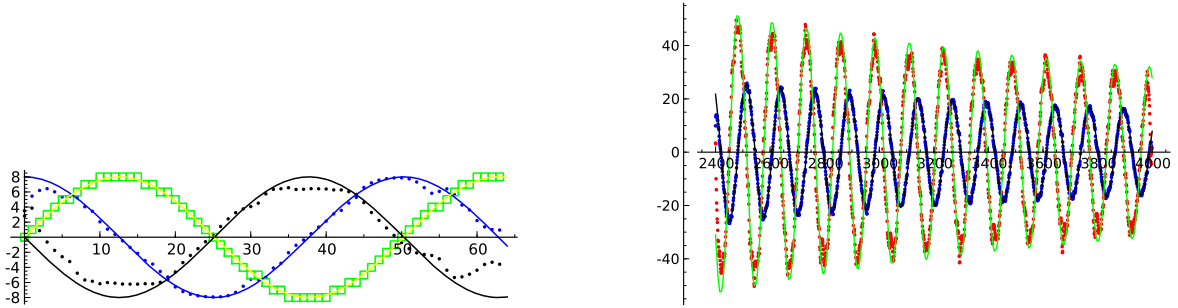
### 5.3.3 Résultats estimation des dérivées avec le masque adaptatif.

Dans cette partie on propose les résultats d'estimations des dérivées premières de diverses fonctions. Pour cela, on choisit de façon arbitraire un pas de discrétisation et l'on calcule une estimation de la dérivée. Figure. 5.5, on propose l'exemple de l'estimation de la dérivée de la fonction  $x \mapsto \sin(x)$  et une estimation de la dérivée première et seconde de la fonction  $x \mapsto \frac{20}{x} \sin(2x)$  pour un pas de discrétisation de  $\frac{1}{8}$ . Pour donner une idée de la convergence multigrille, on propose (Figure. 5.6) une estimation des dérivées première et seconde de la fonction  $x \mapsto \sin(x)$  pour un pas de discrétisation très large  $\frac{1}{100}$ . On montre que l'estimateur converge rapidement vers la valeur exacte de la dérivée.

### 5.3.4 Estimations par la méthode des moindres carrés

Nous avons étudié un estimateur des dérivées basé sur le produit de convolution avec un noyau qui tient compte de la géométrie de la courbe. Nous avons utilisé des poids qui permettent de donner une information supplémentaire sur le voisinage d'un pixel. Pour observer expérimentalement la convergence multigrille, on est obligé de laisser diffuser un certain temps pour pouvoir caractériser la distribution statistique des poids. On obtient des résultats très intéressants avec des masques de petite taille contrairement aux méthodes par convolution binomiale. Cependant, les données initiales pondérées par une valeur donnant une information sur leur pertinence, fait penser à une autre approche basée sur la régression linéaire. Une situation courante en statistique ou en biologie, est d'avoir deux séries de points de mesures expérimentales  $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$  et  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  et de rechercher une relation  $F$  pour modéliser la courbe  $y = F(x)$ . Dans le cas des estimations





(a) estimation de la dérivée première et seconde de la fonction  $x \mapsto \sin(x)$ . En jaune et vert les données initiales et sa discrétisation. En bleu, estimation de la dérivée première avec en trait continu la valeur exacte. En noir en trait continu la valeur exacte et en comparaison l'estimation de la dérivée seconde via la méthode des différences finies adaptatives.

(b) Estimation des dérivée première et seconde de la fonction  $x \mapsto \frac{20}{x} \sin(2x)$

FIGURE 5.5 : Exemples d'estimation des dérivées pour les fonctions  $x \mapsto \sin(x)$  et  $x \mapsto 20\sin(2x)$



(a) Exemple d'estimation de la dérivée de la fonction  $x \mapsto \sin(x)$  pour un pas de discrétisation de  $\frac{1}{100}$

(b) Exemple d'estimation de la dérivée seconde de la fonction  $x \mapsto \sin(x)$  pour un pas de discrétisation de  $\frac{1}{100}$

FIGURE 5.6 : Exemples d'estimations de la dérivée première et seconde. On peut comparer les résultats à la première estimation de la fonction  $x \mapsto \sin(x)$  (Figure. 5.5(a)). On voit la convergence rapide de la méthode pour un masque peu large (masque de taille 300 utilisé pour plus de 6000 points). En rouge on a l'estimation et en bleu la valeur réelle de la dérivée.

des tangentes, on cherche une relation de la forme  $y = ax + b$ . Il s'agit d'une régression linéaire. Le problème de ce type de recherche c'est que les données sont mesurées expérimentalement, et qu'il faut prévoir une marge d'erreur concernant ces données. On considère  $((x_i, y_i))_{i \in [1, n]}$ , le nuage de points issus des deux listes de données expérimentales. On cherche parmi une famille de fonctions  $f(x, \theta)$  où  $\theta$  est un paramètre inconnu, celle qui reproduit au mieux l'ensemble des données. Ce paramètre est obtenu par la minimisation de la somme quadratique des déviations :

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, \theta))^2 \quad (5.22)$$

On note en général la valeur  $(y_i - f(x_i, \theta))^2$ ,  $r_i$  pour résidus. Pour obtenir un meilleur ajustement, on peut utiliser une fonction de poids, qui est en général une mesure de la variance du bruit dans les données. Si on note  $\sigma_i$  une estimation de l'écart type du bruit qui affecte la mesure  $y_i$ , on obtient la formule suivante :

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - f(x_i, \theta))^2}{\sigma_i^2} \\ &= \sum_{i=1}^n w_i (y_i - f(x_i, \theta))^2 \end{aligned}$$

où  $w_i$  est un poids de la mesure  $y_i$ . Pour revenir à l'estimation des tangentes discrètes, l'ensemble des données mesurées sont les pixels de la courbe et on cherche la droite passant au mieux par un ensemble de points de la courbe. La fonction  $f$  cherchée est  $f(x) = ax + b$ . Le résidus  $r_i = (y_i - (ax_i + b))^2$ . Le problème de cette formule, c'est qu'elle ne tient pas compte d'un pixel en particulier, or on souhaite calculer la tangente en un point donné. Une régression linéaire basique comme celle présentée prend en compte la totalité de l'ensemble et cherche la fonction qui ajuste au mieux l'ensemble des points. On remplace donc le poids de la mesure qui affecte  $y_i$  par les poids donnés par le processus de diffusion. On propose ainsi de démarrer la diffusion au point où l'on veut calculer la tangente. Plus les points seront éloignés moins ils auront d'importance dans le processus de régression. Notons  $c_i = (x_i, y_i)$  et  $A_s$  la matrice de diffusion associée à la courbe.

$$S(a) = \sum_{j=1}^n ((y_j - y_i) - a(x_j - x_i))^2 A_s^m(i, j) \quad (5.23)$$

En dérivant par rapport à  $a$  :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S}{\partial a} &= \sum_{j=1}^n 2((y_j - y_i) - a(x_j - x_i)) \times (x_j - x_i) A_s^m(i, j) = 0 \\
 &= \sum_{j=1}^n (y_j - y_i)(x_j - x_i) A_s^m(i, j) - a \sum_{j=1}^n (x_j - x_i)^2 A_s^m(i, j) = 0 \\
 a &= \frac{\sum_{j=1}^n (y_j - y_i)(x_j - x_i) A_s^m(i, j)}{\sum_{j=1}^n (x_j - x_i)^2 A_s^m(i, j)}
 \end{aligned}$$

**Définition 5.3.5**  $\mathcal{C} = \{c_0, c_1, \dots, c_n\}$  une courbe discrète et  $A_s^m$  la matrice stochastique associée à cette courbe. On appelle tangente au point  $c_i = (x_i, y_i)$ , la droite de coefficient directeur  $a$  tel que :

$$a = \frac{\sum_{j=1}^n (y_j - y_i)(x_j - x_i) A_s^m(i, j)}{\sum_{j=1}^n (x_j - x_i)^2 A_s^m(i, j)} \quad (5.24)$$

$$b = y_i - ax_i \quad (5.25)$$

La formule du coefficient directeur de la tangente provient de l'équation. 5.23. On dérive cette formule par rapport à la variable  $a$  pour obtenir la formule fermée de la définition. Se pose la question du comportement multigrille de la méthode d'estimation par moindre carrés.

**Théorème 5.3.6** Soit  $\mathcal{C} = \{c_0, c_1, \dots, c_n\}$  une courbe discrète tel que  $c_j = (x_j, y_j)$  et  $A_s$  la matrice stochastique associée à cette courbe. Si  $A_s^m(i, j) = \frac{1}{2^{2m-1}} C_{2m+1}^{m-j+1}$ , alors on a l'égalité suivante :

$$\frac{\sum_{j=0}^{2m} (y_j - y_i)(x_j - x_i) A_s^m(i, j)}{\sum_{j=0}^{2m} (x_j - x_i)^2 A_s^m(i, j)} = D_{2m-1}^1(c_i)$$

**Remarque.** Ce théorème nous permet de faire le lien entre la méthode de convolution binomiale et la méthode de minimisation par moindre carrés. Remarquons que les poids choisis sont donnés par les coefficients binomiaux. Il s'agit simplement d'alléger les calculs en montrant que les deux formules sont égales, et on pourra par la suite montrer l'équivalence en utilisant la proposition. 5.3.2 avec les poids donnés par le processus de diffusion.

**Démonstration :** On réécrit la formule de la méthode des moindres carrés pour simplifier la preuve. Sans perte de généralités on suppose que le point dont on veut estimer la tangente est au point d'indice 0. Posons  $p_j = A_s^m(i, j)$

$$a = \frac{\sum_{j=-m}^m (y_j - y_0) j p_j}{\sum_{j=-m}^m j^2 p_j}$$

Si  $p_j$  est donné par les coefficients binomiaux, on a :

$$a = \frac{\sum_{j=-m}^m (y_j - y_0) j C_{2m-1}^{m+j}}{\sum_{j=-m}^m j^2 C_{2m}^{m+j}}$$

On peut facilement vérifier que  $\sum_{j=-m}^m j^2 C_{2m}^{m+j} = m 2^{2m-1}$ .  
Considérons le coefficient  $y_j$  dans :

$$(D_{(2m+1)}^1 * \varphi)(x) = \sum_{i=0}^{2m+1} C_{2m-1}^{m+j} (y_{j+1} - y_{j-1})$$

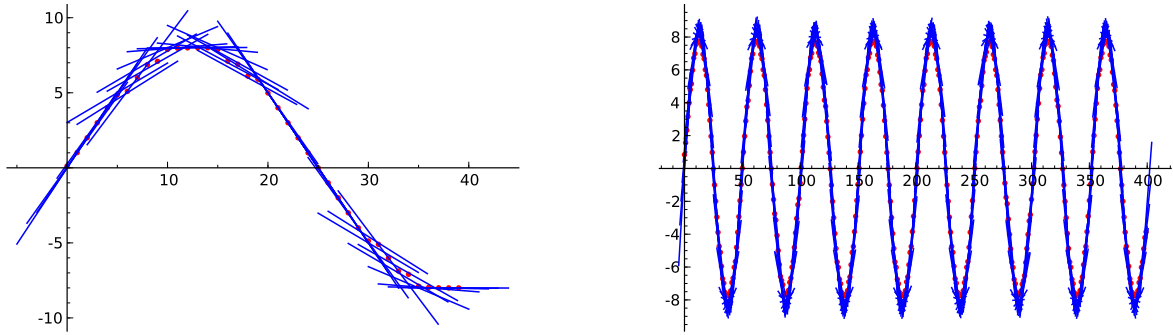
$$\begin{aligned} C_{2m-1}^{m+j}(-y_j) + C_{2m-1}^{m+j-1}(y_j) &= y_j \left( \frac{(2m-1)!}{(m+j-1)!(m+j)!} - \frac{(2m-1)!}{(m+j)!(m-j-1)!} \right) \\ &= y_j \frac{(2m)!}{2m} \frac{m+j-(m-j)}{(m+j)!(m-j)!} \\ &= y_j \frac{1}{2m} \frac{2j(2m)!}{(m+j)!(m-j)!} \\ &= y_j \frac{j}{m} C_{2m}^{m+j} \end{aligned}$$

□

On propose Figure. 5.7 un exemple d'application de l'estimation des tangentes discrètes en utilisant le processus adaptatif.

### 5.3.5 Généralisation aux surfaces en dimension trois

Une méthode analogue peut être appliquée pour les normales sur une surface discrète. On cherche les plans tangents sur une surface pour estimer les normales. On applique le même processus que ci-dessus. Soit  $\Sigma$  une surface, et  $x$  un point de cette surface. On calcule le plan tangent en  $x$  approchant au mieux la surface. Soit  $A_s(x)^m$ , un processus de diffusion discret sur la surface  $\Sigma$  partant du point  $x$ .



(a) Estimation des tangentes avec un masque de taille 5

(b) Estimation des tangentes sur la fonction  $x \mapsto \sin(x)$  avec un masque de taille 15.

FIGURE 5.7 : Exemples d'estimations des tangentes basées sur la méthode des moindres carrés. Contrairement à la méthode initiale qui cherche à passer au mieux par tous les points de la courbe, le processus de diffusion permet de fixer la tangente en un point et les autres points servent à adapter la pente en fonction des contraintes de diffusion

Soit le plan  $P$  d'équation  $ax + by + cz - d = 0$ . Supposons qu'il s'agit d'un plan normalisé, c'est-à-dire  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Posons  $r_i = ax_i + by_i + cz_i - d$ ,  $r_i$  est la distance d'un point  $(x_i, y_i, z_i)$  au plan  $P$ . Soit  $\Sigma$  un ensemble de points pondérés par les poids  $p_i$  de la diffusion centré au point  $x \in \Sigma$ . On cherche  $a, b, c, d$  qui minimise les distances entre chaque point de  $\Sigma$  et le plan.

$$P(a, b, c, d) = \sum_{i=1}^n r_i^2 p_i \quad (5.26)$$

$$= \sum_{i=1}^n (ax_i + by_i + cz_i - d)^2 p_i \quad (5.27)$$

On en déduit un système de quatre équations en dérivant par rapport aux quatre inconnues dans l'équation. 5.26 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial a} &= \sum_{i=1}^n 2x_i(ax_i + by_i + cz_i - d)p_i = 0 \\
\frac{\partial P}{\partial b} &= \sum_{i=1}^n 2y_i(ax_i + by_i + cz_i - d)p_i = 0 \\
\frac{\partial P}{\partial c} &= \sum_{i=1}^n 2z_i(ax_i + by_i + cz_i - d)p_i = 0 \\
\frac{\partial P}{\partial d} &= \sum_{i=1}^n -2(ax_i + by_i + cz_i - d)p_i = 0
\end{aligned} \tag{5.28}$$

On pose  $x_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ,  $y_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$  et  $z_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$ . On obtient la valeur du paramètre  $d$  :

$$d = ax_0 + by_0 + cz_0 \tag{5.29}$$

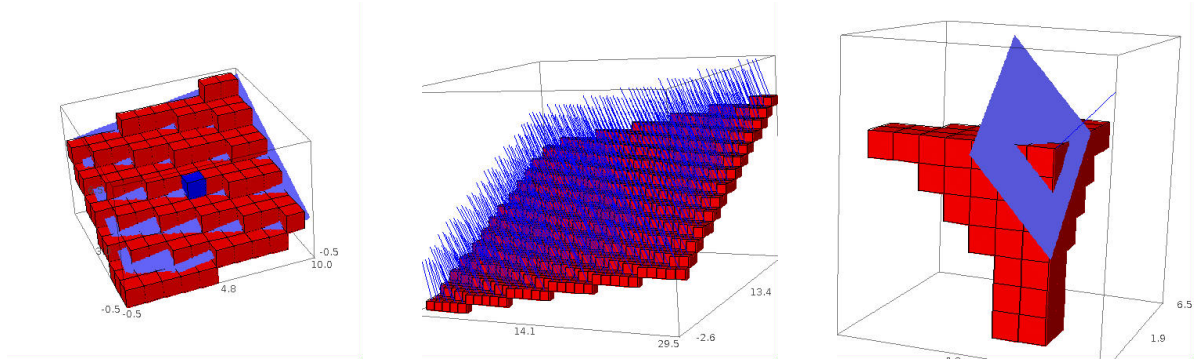
En retirant  $x_0, y_0$  et  $z_0$  du système d'équations. 5.28, on obtient le système d'équations suivant sous sa forme matricielle :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \sum_{i=1}^n (x-x_0)^2 p_i & \sum_{i=1}^n (x-x_0)(y-y_0) p_i & \sum_{i=1}^n (x-x_0)(z-z_0) p_i \\ \sum_{i=1}^n (x-x_0)(y-y_0) p_i & \sum_{i=1}^n (y-y_0)^2 p_i & \sum_{i=1}^n (y-y_0)(z-z_0) p_i \\ \sum_{i=1}^n (x-x_0)(z-z_0) p_i & \sum_{i=1}^n (y-y_0)(z-z_0) p_i & \sum_{i=1}^n (z-z_0)^2 p_i \end{array} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = 0$$

La résolution de ce système d'équations n'apporte qu'une solution triviale  $a = b = c = 0$ . Il faut donc rajouter des conditions sur le système pour écarter cette solution. De ce fait on utilise l'hypothèse de normalisation précédemment introduite :  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Soient  $W$  la matrice du système,  $V$  la matrice diagonale et  $E$  la matrice de passage de  $W$ . Le système se traduit donc en termes de matrices par :

$$WE = VE \tag{5.30}$$

La matrice  $W$  est une matrice  $3 \times 3$ . Elle est donc associée à une matrice  $3 \times 3$  de vecteurs propres et de valeurs propres. On choisit le vecteur propre solution de notre système comme étant celui associé à la plus petite valeur propre. On propose Figure. 5.8, trois exemples d'estimations des normales induites par les plans tangents.



(a) Exemple d'estimation de plan tangent au point  $x$  en bleu

(b) Estimations des normales d'un plan discret

(c) Estimation plan tangent sur un coin de surface

FIGURE 5.8 : Exemples d'applications de la méthode des moindres carrés sur des surfaces en trois dimensions. Les deux premières servent de repère pour vérifier la pertinence de la méthode. La troisième figure en revanche permet de voir le comportement de la détection du plan tangent grâce au processus de diffusion. On trouve le plan tangent passant par le pixel de coin avec la bonne orientation

## 5.4 Application à l'estimation de la courbure

### 5.4.1 Dérivées d'ordres supérieurs

Dans les sections précédentes, nous avons proposé un estimateur de tangentes et de normales basé sur deux approches différentes. La première consiste à utiliser la méthode des différences finies pondérées par le processus de diffusion pour donner une estimation de la dérivée. Cette approche peut se généraliser pour des dérivées d'ordres supérieurs. Une approximation de la dérivée première peut être utilisée afin de déterminer une approximation de la dérivée seconde, puis en réitérant le processus obtenir une valeur de la dérivée d'ordre  $n$ . Le problème de cette méthode pour l'estimation des dérivées d'ordres supérieurs, c'est qu'elle suppose que les approximations précédentes sont de qualité suffisante, pour pouvoir continuer le processus.

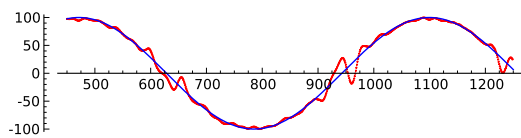
**Définition 5.4.1** *Estimation de la dérivée d'ordre  $n$*

Soit  $\varphi$  une fonction discrète et  $A_s^m(\varphi)$  la matrice de transition d'un marcheur sur la courbe  $\varphi$ . Une estimation de la dérivée  $n$ -ième de la fonction  $\varphi$  au point  $x$  est donnée par :

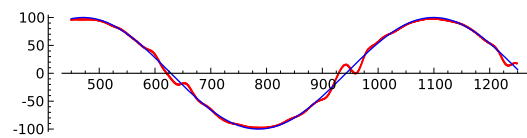
$$D^{(n)}(x) = [A_s^m(\varphi) * \underbrace{\delta_* * A_s^m(\varphi) * \dots * A_s^m(\varphi)}_{n \text{ times}}](x) \quad (5.31)$$

avec  $\delta_*$  un noyau de dérivation (cf Tableau. 5.3).

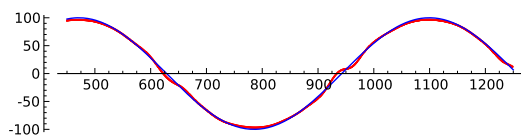
Cette définition représente l'estimation de la dérivée d'ordre 1 que l'on convole avec le noyau adaptatif, le résultat lui même convolé par un noyau de dérivation, pour obtenir la dérivée d'ordre 2, etc...Donc une mauvaise estimation de la dérivée aux premiers ordres, entraîne une dégénérescence pour l'estimation des ordres supérieurs. L'avantage de cette définition c'est d'avoir un paramètre  $m$ , taille du noyau de la convolution, sur lequel on peut jouer pour améliorer l'estimation de la dérivée à un ordre supérieur. Dans un cas simple, on utilise la même taille de noyau pour estimer les dérivées d'ordres successifs. Pour des données avec beaucoup de bruit, on augmente progressivement la taille du noyau afin de limiter les artefacts liés à l'estimation. On donne ainsi une meilleure estimation des dérivées d'ordre  $n$ . Nous savons que l'estimation de la dérivée première est convergente multigrille. Cela signifie que si l'on réduit la taille de la grille, pour une certaine taille de masque l'estimation de la dérivée converge vers la dérivée réelle sous jacente à la discrétisation. Chaque dérivée successive convergera par réduction du pas de la grille, à condition de trouver la bonne taille de masque.



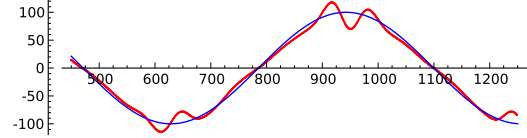
(a) Estimation de la dérivée seconde avec un masque de taille 50



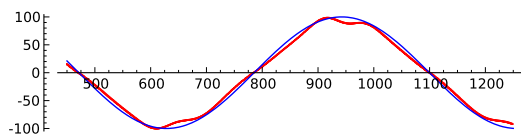
(b) Estimation de la dérivée seconde avec un masque de taille 300



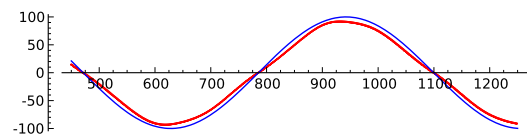
(c) Estimation de la dérivée seconde avec un masque de taille 600



(d) Estimation de la dérivée troisième avec un masque de taille 600



(e) Estimation de la dérivée troisième avec un masque de taille 900



(f) Estimation de la dérivée troisième avec un masque de taille 1800

FIGURE 5.9 : Exemples d'applications de la méthode des différences finies pour estimer les dérivées d'ordres supérieurs à 1. On utilise la taille du masque pour gommer les artefacts liés à l'imprécision de l'estimation de la dérivée d'ordre inférieur.



A titre d'exemple, on propose une estimation de la dérivée seconde de la fonction  $x \mapsto \sin(x)$ . La première estimation de la dérivée utilise un masque de petite taille Figure. 5.9(a), ce qui fait ressortir les imprécisions de l'estimation de la dérivée d'ordre 1. Ensuite, avec un masque de taille de plus en plus large Figure. 5.9(b) et Figure. 5.9(c), on remarque que l'estimation de la dérivée seconde converge vers la dérivée de la fonction réelle sous jacente à la discrétisation. En revanche pour la dérivée troisième (voir Figure. 5.9(d), Figure. 5.9(e) et Figure. 5.9(f)), l'estimation de la dérivée dépend de la dérivée seconde. Or, malgré une bonne approximation, il reste quelques perturbations, qui sont largement amplifiées pour la dérivée troisième. De ce fait, la taille du masque doit s'adapter, pour éliminer au mieux les irrégularités de la dérivée troisième, au dépend des extremas de la fonction qui ne sont désormais plus atteints.

### 5.4.2 Étude de la convergence multigrille

Dans cette partie, on étudie le comportement de l'estimateur des dérivées d'ordre un et deux. Dans la section précédente, nous avons vu que la méthode d'estimation basée sur les convolutions pouvait s'écrire comme une méthode des moindres carrés pondérées. Nous avons montré Théorème. 5.3.6, que la méthode par convolution définie dans [EM09], pouvait s'écrire comme une minimisation des moindres carrés utilisant un masque gaussien. Une autre approche proposée par [ASWL11], précédemment introduit dans le chapitre. 3 peut-être vue comme une minimisation des moindres carrés sans pondération. Nous avons proposé un ajustement de cette approche en utilisant une pondération locale dépendante de la géométrie de la courbe. Cette approche était déjà utilisée en analyse d'images pour détecter les variations du gradient et avoir ainsi un traitement qui tient compte des détails de l'image.

**Théorème 5.4.2** Soit  $y_i = D^1(f)(x_i)$ ,  $x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  la discrétisation d'une fonction  $y = f(x)$  deux fois différentiable. Alors  $\forall j, \exists \zeta_j \in [x, x_j]$  tel que :

$$\forall k, |D^1(f)(x_k) - f'(x_k)| \leq \max_{x_j \in \mathcal{V}_k} \left\{ \left| \frac{f''(\zeta_j)}{2} (x_j - x_k) \right| \right\}$$

**Démonstration :** Sous l'hypothèse que  $f$  est deux fois différentiable, on a le développement de Taylor Lagrange au point  $x_k$  :  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \zeta \in [x, x_k]$

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(\zeta)}{2}(x - x_k)^2$$

$\forall j, \exists \zeta_j$  avec un poids  $p_j$  tel que :

$$y_j - y_k = f(x_j) - f(x_k) = f'(x_k)(x_j - x_k) + \frac{f''(\zeta_j)}{2}(x_j - x_k)^2 \quad (5.32)$$

En remplaçant dans l'équation. 5.32 dans la définition de la dérivée d'ordre un, on a :

$$\begin{aligned}
 D^1(f)(x_k) &= \frac{\sum_{j=1}^n (y_j - y_k)(x_j - x_k)p_j}{\sum_{j=1}^n (x_j - x_k)^2 p_j} \\
 &= \frac{\sum_{j=1}^n f'(x_k)(x_j - x_k)^2 p_j + \frac{f''(\zeta_j)}{2}(x_j - x_k)^3 p_j}{\sum_{j=1}^n (x_j - x_k)^2 p_j} \\
 &= f'(x_k) + \frac{\sum_{j=1}^n \frac{f''(\zeta_j)}{2}(x_j - x_k)^3 p_j}{\sum_{j=1}^n (x_j - x_k)^2 p_j}.
 \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 |D^1(f)(x_k) - f'(x_k)| &= \left| \frac{\sum_{j=1}^n \frac{f''(\zeta_j)}{2}(x_j - x_k)^3 p_j}{\sum_{j=1}^n (x_j - x_k)^2 p_j} \right| \\
 &\leq \frac{\sum_{j=1}^n \max_{j \in \mathcal{V}_k} \left\{ \left| \frac{f''(\zeta_j)}{2}(x_j - x_k) \right| \right\} (x_j - x_k)^2 p_j}{\sum_{j=1}^n (x_j - x_k)^2 p_j} \\
 &\leq \max_{j \in \mathcal{V}_k} \left\{ \left| \frac{f''(\zeta_j)}{2}(x_j - x_k) \right| \right\}.
 \end{aligned}$$

□

De la même façon, on a une borne d'erreurs sur la dérivée d'ordre deux.

**Théorème 5.4.3** Soit  $y_i = D^2(f)(x_i)$ ,  $x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  la discrétisation d'une fonction  $y = f(x)$  définie sur  $I$  trois fois différentiable. On note  $h$  le pas de la discrétisation et  $\Delta_{ik} = \frac{(x_i - x_k)^3 p_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - x_k)^2 p_i}$ . Alors  $\forall i, j, k, \exists \zeta_j \in [x, x_j], \exists \epsilon_i \in [x, x_i]$  et  $\exists \epsilon'_i \in [x, x'_i]$  tel que :

$$|D^2(f)(x_k) - f''(x_k)| \leq \max_{j \in \mathcal{V}_k} \left\{ \left| \frac{f'''(\zeta_j)}{2}(x_j - x_k) \right| \right\} + \max_{i, j \in \mathcal{V}_k} \left\{ \frac{n}{(x_j - x_k)h} f''(\epsilon_i) \Delta_{ik} - f''(\epsilon'_i) \Delta_{ij} \right\}$$

**Démonstration :** Soit  $x_k \in I$ , la dérivée seconde au point  $k$  est donnée par la formule :

$$D^2(f)(x_k) = \frac{\sum_{j=1}^n (D^1(f)(x_j) - D^1(f)(x_k))(x_j - x_k)p_j}{\sum_{j=1}^n (x_j - x_k)^2 p_j} \quad (5.33)$$

De la même façon que précédemment,  $\exists \zeta_j \in [x, x_j]$  tel que :

$$f'(x_j) - f'(x_k) = f''(x_k)(x_j - x_k) + \frac{f'''(\zeta_j)}{2!}(x_k - x_j)^2 \quad (5.34)$$

De même que dans la démonstration du Théorème. 5.4.2, on a :

$$\begin{aligned} \exists \zeta_i \in [x, x_i], \quad D^1(f)(x_k) &= f'(x_k) + \frac{\sum_{i=1}^n \frac{f''(\zeta_i)}{2}(x_i - x_k)^3 p_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - x_k)^2 p_i} \\ \exists \zeta'_i \in [x, x'_i], \quad D^1(f)(x_j) &= f'(x_j) + \frac{\sum_{i=1}^n \frac{f''(\zeta'_i)}{2}(x_i - x_j)^3 p_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - x_j)^2 p_i} \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} f'(x_j) - f'(x_k) &= f''(x_k)(x_j - x_k) + \frac{f'''(\zeta_j)}{2}(x_j - x_k)^2 \\ (f'(x_j) - f'(x_k))(x_j - x_k) &= f''(x_k)(x_j - x_k)^2 + \frac{f'''(\zeta_j)}{2}(x_j - x_k)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D^1(f)(x_j) - D^1(f)(x_k))(x_j - x_k) &= f''(x_k)(x_j - x_k)^2 + \frac{f'''(\zeta_j)}{2}(x_j - x_k)^3 + (x_j - x_k) \\ &\quad \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n \frac{f''(\zeta_i)}{2}(x_i - x_k)^3 p_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - x_k)^2 p_i} - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{f''(\zeta'_i)}{2}(x_i - x_j)^3 p_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - x_j)^2 p_i} \right\} (x_j - x_k) \end{aligned} \quad (5.36)$$

En remplaçant l'équation. 5.36 dans l'équation. 5.33,

$$D^2(f)(x_k) = \frac{\sum_{j=1}^n (D^1(f)(x_j) - D^1(f)(x_k))(x_j - x_k) p_j}{\sum_{j=1}^n (x_j - x_k)^2 p_j} \quad (5.37)$$

$$(5.38)$$

$$\begin{aligned} D^2(f)(x_k) &= \frac{\sum_{j=1}^n (f''(x_k)(x_j - x_k)^2 p_j + \frac{f'''(\zeta_j)}{2}(x_j - x_k)^3 p_j)}{\sum_{j=1}^n (x_j - x_k)^2 p_j} + \\ &\quad \frac{\sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n \frac{f''(\zeta_i)}{2}(x_i - x_k)^3 p_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - x_k)^2 p_i} - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{f''(\zeta'_i)}{2}(x_i - x_j)^3 p_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - x_j)^2 p_i} \right\} (x_j - x_k) p_j}{\sum_{j=1}^n (x_j - x_k)^2 p_j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D^2(f)(x_k) - f''(x_k) &= \frac{\sum_{j=1}^n \frac{f'''(\zeta_j)}{2} (x_j - x_k)^3 p_j}{\sum_{j=1}^n (x_j - x_k)^2 p_j} \\
&\quad + \underbrace{\frac{\sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n \frac{f''(\zeta_j)}{2} (x_i - x_k)^3 p_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - x_k)^2 p_i} - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{f''(\zeta'_j)}{2} (x_i - x_j)^3 p_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - x_j)^2 p_i} \right\} (x_j - x_k) p_j}{\sum_{j=1}^n (x_j - x_k)^2 p_j}}_{S_2} \\
S_2 &= \frac{\sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n \frac{f''(\zeta_j)}{2} (x_i - x_k)^3 p_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - x_k)^2 p_i} - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{f''(\zeta'_j)}{2} (x_i - x_j)^3 p_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - x_j)^2 p_i} \right\} (x_j - x_k) p_j}{\sum_{j=1}^n (x_j - x_k)^2 p_j}
\end{aligned}$$

Pour plus de clarté, notons  $h$  le pas de discrétisation de la grille. On appelle  $(x_i - x_k) = \delta_{ik}h$  :

$$S_2 = \frac{\sum_{j=1}^n \delta_{jk} h p_j \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n \frac{f''(\zeta_j)}{2} \delta_{ik}^3 h^3 p_i}{\sum_{i=1}^n \delta_{ik}^2 h^2 p_i} - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{f''(\zeta'_j)}{2} \delta_{ij}^3 h^3 p_i}{\sum_{i=1}^n \delta_{ij}^2 h^2 p_i} \right\}}{\sum_{j=1}^n \delta_{jk}^2 h^2 p_j}$$

On pose  $\Delta_{ik} = \frac{\delta_{ik}^3 p_i}{\sum_{i=1}^n \delta_{ik}^2 p_i}$

$$S_2 = \frac{\sum_{j=1}^n \delta_{jk} h p_j \left\{ \sum_{i=1}^n f''(\zeta_i) \Delta_{ik} - f''(\zeta'_i) \Delta_{ij} \right\}}{\sum_{j=1}^n \delta_{jk}^2 h^2 p_j}$$

Par passage au maximum :

$$\begin{aligned}
S_2 &\leq \max_{i,j \in I} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^n \frac{\delta_{jk}^2 h^2 p_j}{\delta_{jk} h} \left\{ \sum_{i=1}^n f''(\zeta_i) \Delta_{ik} - f''(\zeta'_i) \Delta_{ij} \right\}}{\sum_{j=1}^n \delta_{jk}^2 h^2 p_j} \right\} \\
&\leq \max_{i,j \in \mathcal{V}_k} \left\{ \left| \frac{n}{\delta_{ik} h} (f''(\zeta_i) \Delta_{ik} - f''(\zeta'_i) \Delta_{ij}) \right| \right\}
\end{aligned}$$

On en déduit une borne sup pour l'estimation de la dérivée seconde :

$$\left| D^2(f)(x_k) - f''(x_k) \right| \leq \max_{j \in \mathcal{V}_k} \left\{ \left| \frac{f'''(\zeta_j)}{2} (x_j - x_k) \right| \right\} + \max_{i, j \in \mathcal{V}_k} \left\{ \left| \frac{n}{\delta_{ik} h} f''(\zeta_i) \Delta_{ik} - f''(\zeta'_i) \Delta_{ij} \right| \right\}$$

□

**Corollaire 5.4.4** Soit  $y_i = D^1(f)(x_i)$ ,  $x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  la discrétisation d'une fonction  $y = f(x)$  avec  $f \in \mathcal{C}^3$ . Soit  $h$  le pas de la discrétisation de la grille. Alors, quand  $h \rightarrow 0$ , on a  $|D^1(f)(x_k) - f'(x_k)| \rightarrow 0$  et  $|D^2(f)(x_k) - f''(x_k)| \rightarrow 0$

**Démonstration :** C'est une application directe du Théorème. 5.4.2 et Théorème. 5.4.3. Pour  $n$  la taille du masque fixé, quand  $h$  tend vers 0,  $(x - x_k) \rightarrow 0$ .

□

### 5.4.3 Applications à la courbure de fonctions réelles

D'après ce qui précède, l'estimation des dérivées d'ordres supérieures à deux sont dépendantes de la qualité des estimations précédentes. Malgré cela, si l'on regarde l'estimation de la dérivée troisième, malgré les bonnes qualités de la dérivée seconde et de la dérivée première, le résultat obtenu est nettement inférieur à celui des dérivées précédentes. En réitérant le processus, il est clair que les pertes seront de plus en plus importantes, et il faudra utiliser des masques de plus en plus large pour obtenir une estimation qui aura toujours du sens. Dans l'introduction de ce chapitre, nous avons explicité les formules de calcul de la courbure en fonction de leur paramétrisation. Il se trouve que ces formules ne dépendent que de la dérivée première et seconde. La dérivée première et seconde ont été prouvées multigrille convergentes, on est donc en mesure de déterminer une taille de masque pour laquelle l'estimation de la dérivée sera aussi proche que l'on veut de la dérivée réelle sous-jacente. Par ailleurs, ce critère nous permet de prévoir une estimation de la courbure de grande qualité, dû la aussi, à la convergence multigrille. Cette approche est similaire aux méthodes présentées [FM08; MBF08; WS93], basée sur la convolution par des noyaux gaussiens. Cependant, notre approche avec un noyau de diffusion permet à la fois de donner une estimation des dérivées résistantes au bruit mais aussi permet de justifier dans le cadre théorique, les poids utilisés pour la convolution. Dans le papier [FM08], les auteurs proposent un pseudo-masque gaussien qui donne d'excellents résultats en pratique, mais ne peuvent pas cependant justifier le choix de la construction. L'avantage de notre approche c'est que l'on retrouve sur des courbes discrètes, des masques gaussiens sur les parties régulières, et les masques s'adaptent en fonction de la courbure. Ces masques de convolution sont donc par construction adaptés à l'estimation de la courbure.

Rappelons la définition classique de la courbure pour une fonction réelle dans le plan. Soit  $(x, y(x))$  un graphe de fonction avec  $x \in I \subset \mathbb{R}$ . Alors la courbure de la fonction est donnée en tout point par  $\Gamma(x) = \frac{y''(x)}{(1 + y'^2(x))^{\frac{3}{2}}}$ . En utilisant les notations précédentes, on définit un estimateur de la courbure de fonction discrète de la façon suivante.

**Définition 5.4.5** *Estimation de la courbure*

Soit  $\varphi$  un fonction discrète, un estimateur discret de la courbure est donnée par la formule :

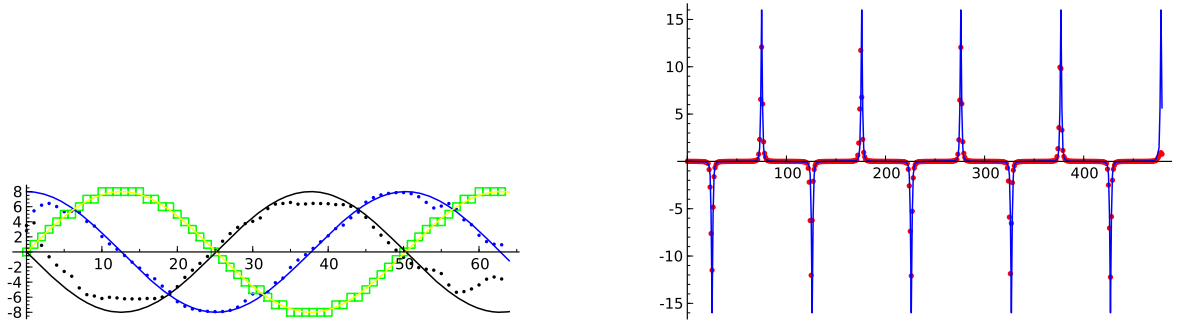
$$\Gamma(x) = \frac{D^2(x)}{(1 + D^1(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

A titre d'exemple, on calcule la courbure de la fonction discrète  $x \mapsto \sin(x)$  et on compare la courbure réelle avec la courbure estimée. On propose une estimation de la courbure basée sur différents pas de discrétisation pour mettre en évidence le comportement multigrille de l'estimateur. Ce qui est intéressant c'est de pouvoir également comparer les tailles de masques utilisées par notre méthode avec ceux de la méthode qui se rapproche le plus, la convolution binomiale.

On propose un exemple d'estimation de la courbure Figure. 5.10. Sur cet exemple, on peut comparer et voir le comportement de l'estimateur quand le pas de la grille tend vers zéro. Tout d'abord pour un pas de discrétisation assez grossier, Figure. 5.10(a), on obtient une assez bonne approximation de la dérivée première et seconde. A partir de ces résultats on donne une estimation de la courbure Figure. 5.10(b). Enfin on utilise des fonctions avec un pas de discrétisation de  $\frac{1}{100}$  pour obtenir une estimation plus précise Figure. 5.10(c). On effectue une recentrage de cette figure sur la zone plate pour voir le comportement de l'estimation sur les valeurs les plus faibles Figure. 5.10(d).

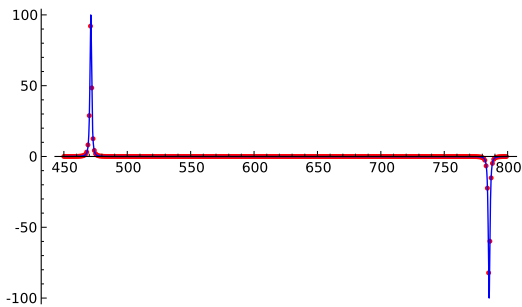
#### 5.4.4 Conclusion et perspectives

Nous avons présenté un nouvel estimateur des tangentes et de la courbure de courbes discrètes. Nous avons montré que cet estimateur se comporte comme ceux basés sur la convolution par des filtres gaussiens, mais avec des poids qui sont adaptés à la géométrie de la courbe. Cela permet d'avoir une caractérisation de la courbe telle qu'on pouvait l'avoir avec la décomposition en segments ou en arcs de cercle maximaux. La démonstration de la convergence multigrille de cette approche repose essentiellement sur le fait que le processus de diffusion, à partir d'un certain temps, a le même comportement asymptotique qu'une loi normale et de ce fait, donne des résultats similaires à la méthode par convolution binomiale. Cette approche permet donc de relier deux méthodes a priori distinctes, par un processus de diffusion et qui permet d'avoir les même caractérisations qu'une segmentation de la courbe. Une autre façon de le voir et d'utiliser les poids de la diffusion pour détecter des zones de bruit sur une courbe. Par segmentation, Bertrand Kerau-

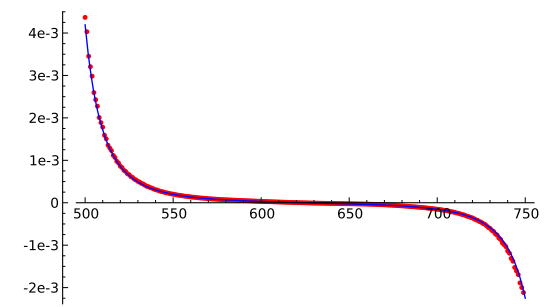


(a) Estimation de la dérivée première (bleu) et seconde (noir) avec un masque de taille 15

(b) Estimation de la courbure avec un masque de taille 15 et un pas de discrétisation de  $\frac{1}{8}$



(c) Estimation de la courbure avec un masque de taille 300 et un pas de discrétisation de  $\frac{1}{100}$



(d) Zoom sur un détail de la courbure de la Figure. 5.10(c)

FIGURE 5.10 : Exemples d'estimation de la courbure de la fonction  $x \mapsto \sin(x)$ . Malgré un pas de discrétisation faible et un masque de petite taille, on obtient une très bonne approximation de la courbure Figure. 5.10(b) dont on peut voir une estimation des dérivées premières et secondes Figure. 5.10(a). Enfin quand on fait tendre le pas de la grille vers zéro, l'estimateur semble converger vers la courbure de la fonction réelle.

tret et Jacques-Olivier Lachaud[KL09], proposent d'utiliser la sensibilité au bruit de l'algorithme de segmentation, et d'étudier en analyse multi echelle les variations des longueurs des segments maximaux sur le contour. En fonction des variations, ils peuvent déterminer de façon précise, les endroits ou il y a du bruit. Nous proposons une autre solution pour détecter du bruit sur un contour en utilisant une paramétrisation curviligne, et d'étudier les variations de la paramétrisation dans un voisinage donné.

## 5.5 Détection de bruit dans un contour

### 5.5.1 Paramétrisation curviligne

D'après ce qui précède, nous avons vu que la distribution des poids sur une droite discrète suivait une loi normale. De ce fait , en fonction de la pente de la droite, nous avons montré que nous pouvions calculer théoriquement, l'écart type de la distribution et ainsi pouvoir exactement calculer la loi que suivront asymptotiquement les poids. Dans ce chapitre, nous avons montré que pour des courbes discrètes 8-connexes, un théorème similaire (cf Théorème. 5.3.2) existait, mais pour une diffusion suffisamment longue. Ce qui signifie, qu'une approximation du poids entre deux points  $(i, j)$  sur une courbe peut être donnée en tenant compte de l'écart type de la distribution par un équivalent :

$$A_s(i, j) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{d(i, j)}{\sigma_i} \right)^2}$$

Remarquons que dans notre cas, le poids de la diffusion partant du points  $i$  vers le point  $j$  est connu, et il est facile de calculer l'écart type de la distribution des poids. On peut donc extraire une approximation de la distance entre le point  $i$  et le point  $j$  :

$$d(i, j) \sim \sqrt{-2\sigma_i^2 \ln(\sigma_i \sqrt{2\pi} g(i, j))}$$

En choisissant un point de départ sur notre courbe, on est donc en mesure de fournir une distance curviligne approchée de l'ensemble. Cette définition est bien sûr approchée, car la diffusion sur une courbe quelconque ne suit une loi normale qu'asymptotiquement, et d'autre part, on ne peut fournir une distance entre deux points  $i$  et  $j$  que dans un intervalle de confiance (en général  $[-3\sigma_i, 3\sigma_i]$ ). Ce qui dans le cas d'une courbe discrète, nécessite un décalage de la diffusion en un point  $i'$  pour calculer les distances des points les plus éloignés. Cependant, pour déterminer le bruit dans le contour cela suffit à caractériser la distance de diffusion.

#### Définition 5.5.1 Distance de diffusion

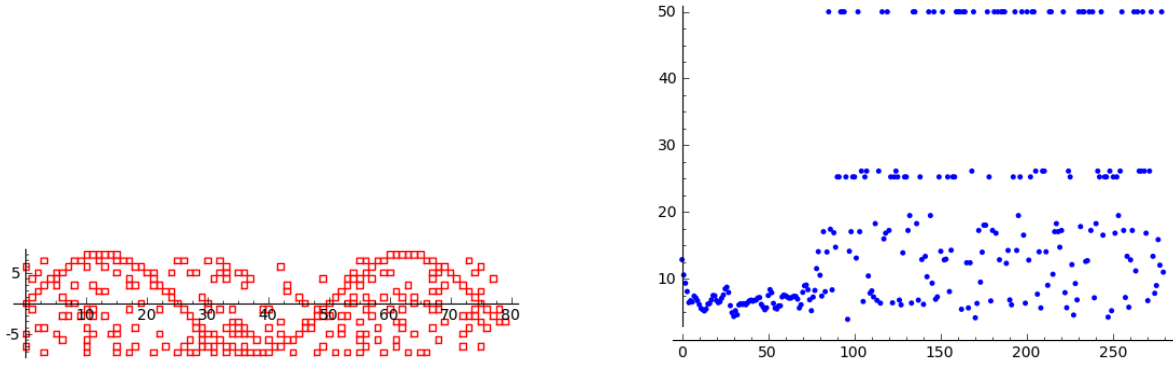
Soit  $\mathcal{C}$  une courbe discrète, soit  $\sigma_i$  l'écart type d'une diffusion partant d'un point  $i \in \mathcal{C}$  et soit



$j \in \mathcal{C}$  tel que le poids au point  $j \in [-3\sigma_i, 3\sigma_i]$ . Alors on appelle distance entre  $i$  et  $j$  la valeur :

$$d(i, j) = \sqrt{-2\sigma_i^2 \ln(\sigma_i \sqrt{2\pi} g(i, j))} \quad (5.39)$$

La paramétrisation de la courbe s'effectue en choisissant un point de la courbe et en calculant les distances de diffusion entre ce point et tous les points du voisinage dans l'intervalle de confiance. Puis on change de points et on réitère jusqu'à ce que tous les points de l'ensemble aient une distance de diffusion relative au premier point choisi. À noter tout de même que dans le cas de contours avec du bruit, certains points peuvent être déconnectés de la courbe. Cependant, on peut retirer ces points en pré calcul juste en regardant la diagonale de la matrice de diffusion. À titre d'exemple, on propose un contour avec du bruit Figure. 5.11(a). En étudiant les valeurs successives de la diagonale de la matrice de transition, on remarque assez nettement que certaines valeurs restent particulièrement hautes. Cela signifie que la diffusion reste bloquée sur les pixels de la courbe. La conclusion que l'on peut tirer, est que malgré des temps de diffusions croissants, si ces pixels gardent des valeurs très élevées, cela signifie qu'il y a peu de pixels dans leur voisinage, et donc qu'ils sont déconnectés de la courbe principale, qui apparaît Figure. 5.11(b), dans la ligne de plus faibles valeurs. On peut donc en pré-calcul, retirer la totalité de ces points.



(a) Exemple de contour bruité

(b) Calcul en chaque point de la fréquence de passages par un même point

FIGURE 5.11 : Exemple de détection de pixels déconnectés par étude de la diagonale de la matrice d'adjacence. Il apparaît assez nettement deux lignes avec de très hautes valeurs sur la diagonale, qui correspondent aux points avec très peu de voisins. De ce fait il est facile d'éliminer rapidement les points déconnectés de la courbe.

### 5.5.2 Détection de bruit et résultats

Une première détection de bruit peut se faire à l'aide du processus de diffusion. Les pixels déconnectés de la courbe principale apparaissent clairement pour un temps de dif-

fusion suffisant et on peut d'ores et déjà retirer une partie de ces points. A partir de la paramétrisation définie à partir de la distance curviligne, on peut détecter également les zones de perturbations dans un contour.

**Définition 5.5.2** *Indices de Perturbations*

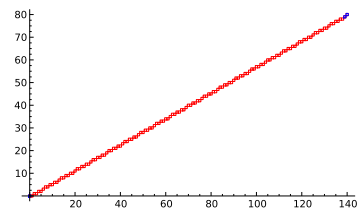
Soit  $\mathcal{C}$  une courbe discrète, et  $\mathcal{P}$  la paramétrisation curviligne de la  $\mathcal{C}$ . On définit l'indice de perturbation au point  $i$  la valeur :

$$E(i) = \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} (\mathcal{P}(j) - \mathcal{P}(i))^2$$

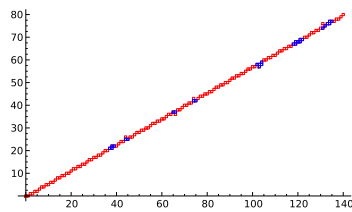
L'indice de perturbation permet de mesurer dans un voisinage donné, le comportement de la paramétrisation. Si la courbe n'est pas bruitée, a priori l'indice de perturbation sera semblable en tout point de la courbe. En revanche, dans le cas d'un contour avec du bruit, une forte différence entre les distances attendues et les valeurs effectivement calculées va donner une valeur de perturbation fortement différente des parties non bruitées et donc il sera facile de les détecter. Nous proposons à titre d'exemple, quelques résultats de détection de bruit Figure. 5.12 sur des contours sans bruit, et des contours avec plus ou moins de bruit pour mettre en évidence le fonctionnement de la méthode. A priori, on ne détecte pas le bruit lui-même. Mais on détecte les zones vers lequel il existe une perturbation qui modifie de façon significative la paramétrisation curviligne. Il est donc normal de détecter des pixels qui ne sont pas du bruit, mais qui se trouvent proches de ceux-ci.

## 5.6 Conclusion

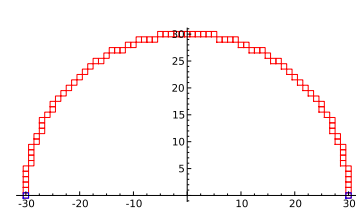
Dans ce chapitre, nous avons proposé une étude des paramètres géométriques de courbes discrètes. L'estimation des tangentes et des dérivées d'ordres  $n$ , donnent en pratique de bons résultats et l'on a montré la convergence multigrille de la méthode pour l'estimation des dérivées premières. Les considérations faites dans les chapitres précédents, sur la pertinence géométrique de l'opérateur Laplacien induit par le processus de diffusion permet de justifier ce choix de poids pour la convolution. Il faut toutefois remarquer, que pour une diffusion suffisamment longue, on retrouvera à terme une distribution statique des poids similaire à une loi normale. Le gain s'effectue donc au niveau de la taille des masques. Dans les exemples, pour des tailles de masques relativement petit par rapport à la taille des données, on obtient une bonne approximation des dérivées, et donc par comparaison avec les autres méthodes, il existe donc un gain important. Mais ce résultat n'est que purement expérimental, et on se contentera donc de la pertinence des poids pour estimer la courbure par rapport à des poids tenant simplement compte de la distance. En revanche dans le chapitre suivant, on propose une autre application du processus de diffusion sur des images en niveau de gris. L'idée est de mettre en avant, là encore, la différence



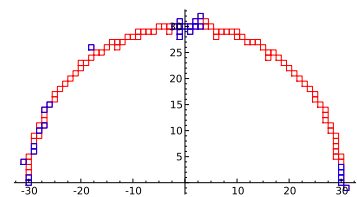
(a) En rouge, une droite discrète sans bruit et en bleu les pixels bruités détectés.



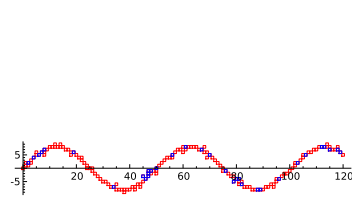
(b) En rouge, une droite discrète avec bruit et en bleu les pixels bruités détectés.



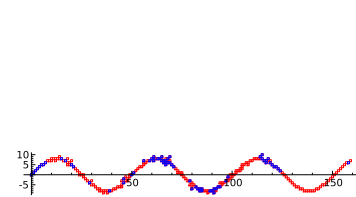
(c) En rouge, un cercle discret de rayon 30 sans bruit et en bleu les pixels bruités détectés.



(d) En rouge, un cercle discret de rayon 30 avec bruit et en bleu les pixels bruités détectés



(e) En rouge, une courbe discrète avec bruit et en bleu les pixels bruités détectés.



(f) En rouge, une courbe discrète avec bruit et en bleu les pixels bruités détectés.

FIGURE 5.12 : Exemple de détection de bruit dans un contour. Figure. 5.12(a) et Figure. 5.12(c), malgré le fait qu'il n'y ait aucun bruit on détecte des zones de bruit. Il s'agit simplement d'un effet de bords, dû au rebond de la diffusion sur la courbe. En revanche, on détecte bien les zones où il y a une perturbation liée aux pixels ajoutés par le bruit.

entre les méthodes par convolution binomiales très classiques, et les méthodes utilisant les processus de diffusion.

---

# Filtrage par Convolution Adaptative

Les miroirs feraient bien de réfléchir avant de renvoyer les images.

---

JEAN COCTEAU

## Préambule

*Nous proposons dans cette section une application du noyau de Laplace précédemment défini, comme filtre moyennneur pour débruiter des images en niveau de gris.*

## Contents

---

6.1	Introduction . . . . .	120
6.2	Introduction au traitement d'images . . . . .	121
6.3	Filtres basés sur les équations aux dérivées partielles . . . . .	126
6.4	Application du Laplacien comme filtre moyennneur . . . . .	134
6.5	Résultats . . . . .	142
6.6	Application en astrophysique à la détection de sources ponctuelles . . . . .	147
6.7	Conclusion . . . . .	152

---

## 6.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons proposé un noyau de diffusion permettant de définir un opérateur de Laplace discret. Cet opérateur est défini comme le déplacement d'un marcheur sur une courbe binaire, dont les états de transition sont caractérisés par le voisinage autour du marcheur. Le noyau de la diffusion représente localement les possibilités de déplacement offertes par la connexité, et donc par la géométrie de la courbe. Nous avons introduit un processus étendu, c'est-à-dire que les marcheurs avaient la possibilité de s'éloigner dans des pixels proches de la courbe. Cette approche a été justifiée par la nécessité d'uniformiser le processus de diffusion sur les droites discrètes quelque soit leurs pentes. Ce processus s'étend de façon plus large à des courbes dont chaque pixel possède une couleur appelée niveau de gris. La courbe est tracée en noir et les pixels fantômes sont des pixels un peu moins tenus que leur voisins, et en blanc on retrouve les pixels les plus éloignés. Lors du tracé sur un écran d'ordinateur, le tracé s'adapte et atténue la couleur du voisinage pour donner une impression de courbe lisse. D'un point de vue pratique, on étudie ce type de courbe et pas simplement une courbe binaire.

Pour approfondir, comment étudier une courbe ou une forme géométrique sur une image ? Jusqu'à présent dans les approches par segmentation [FT99; LVdV07; NDR07], on ne peut pas intégrer la donnée de la couleur dans la reconnaissance de segments. Cette question prend pourtant tout son sens quand on étudie des formes, la courbure ou les tangentes d'un cliché médical tel qu'une image IRM ou un scanner. Dans les chapitres précédents, l'étude d'une autre approche que la segmentation, était motivée par les travaux de Remy Malgouyres et de Sébastien Fourey sur l'utilisation de la convolution binomiale, moins sensible au bruit que les estimateurs par segmentation.

La réduction du bruit est un problème très important dans la communauté de l'imagerie, avec de nombreuses applications en imageries médicales, traitement du signal, RADAR, sismologie, géologie... Les nombreuses méthodes qui existent tendent à montrer la complexité du problème : trouver le juste milieu entre réduire de façon conséquente le bruit dans une image et la préservation de certaines zones d'intérêts, comme en particulier les structures fines ou les détails. De nombreuses méthodes proposées, détruisent les structures fines et érodent les détails de l'image, donnant ainsi un effet de flou. Beaucoup de recherche sur les méthodes basées sur les équations aux dérivées partielles, essaie justement de proposer une alternative pour ralentir le lissage aux abords de certaines structures, telles que les contours. L'opérateur Laplacien, détecte les contours, c'est-à-dire qu'il reconnaît les zones de fortes variations du gradient. De cette façon, on peut adapter le lissage d'une image pour réduire l'intensité du bruit en fonction des contours. Ce type de méthode s'appelle des filtres anisotropes. On propose d'étudier un nouveau filtre, basé sur

les processus adaptatifs précédemment introduits, que l'on étend aux images en niveau de gris, pour réduire l'intensité du bruit tout en préservant les structures fines et les contours.

Ce chapitre se présente comme suit :

- Dans une première partie, on propose une introduction aux méthodes du traitement du signal classique. On présentera des modèles de bruit qui seront utilisés par la suite pour appliquer les différents filtres de réduction de bruit.
- Par la suite, nous étudierons en particulier les méthodes de filtrages anisotropes. Ces méthodes utilisent des équations aux dérivées partielles, telles que l'équation de diffusion de la chaleur. Ainsi, on pourra faire le lien avec le processus de diffusion adaptatif défini dans le chapitre précédent.
- Ensuite, nous appliquerons le filtre adaptatif. Nous étendrons la définition précédente pour construire un modèle de diffusion sur des images en niveau de gris. De cette façon, nous pourrions déterminer les poids d'un voisinage donné en fonction des probabilités de transition d'un point dans son voisinage.
- On proposera pour finir une galerie d'exemples de filtrages par ce masque de convolution sur des images avec différents types de bruit.

## 6.2 Introduction au traitement d'images

### 6.2.1 Image et modèle de bruit

Les objets auquel s'intéressent les médecins, astrophysiciens ou biologistes sont par nature inaccessibles à l'étude directe et il est nécessaire de passer par une acquisition pour accéder aux informations géométriques. Ce procédé implique une part d'incertitude liée à la qualité des instruments et à l'accessibilité des objets étudiés. Dans ce cadre, l'image obtenue possède un certain nombre d'artefacts que l'on appelle du bruit. Ce bruit peut apparaître de différentes façons : bruit par brouillage (Figure 6.1(b)) avec des pixels qui vont changer de couleurs, du bruit par mélange où les pixels vont s'échanger avec des pixels de leur voisinage...

Dans leur article [BCM10], Antoni Buades, Bartomeu Coll et Jean-Michel Morel définissent un modèle de bruit basé sur un paramètre  $h$  des filtres de réduction de bruit. Le paramètre  $h$  traduit l'amplitude de filtrages appliqué à une image. Ils définissent le résultat d'une méthode de débruitage  $D_h$  comme la décomposition d'une image  $v$  de la façon suivante :

$$v = vD_h + n(D_h, v) \quad (6.1)$$

où  $vD_h$  représente l'image lissée par la méthode  $D_h$  et  $n(D_h, v)$  le bruit détecté par la méthode. Le lissage d'une image  $v$  entraîne donc une perte d'informations concentrées dans la partie  $n(D_h, v)$ .



(a) Image originale de Lena



(b) Image de Lena avec bruit blanc

FIGURE 6.1 : Image classique de Lena. Sur l'image de gauche, l'image originale, sur la droite l'image avec du bruit blanc.

**Définition 6.2.1** *Méthode de bruit [BCM10]*

Soit  $u$  une image et  $D_h$  un filtre de réduction de bruit dépendant du paramètre  $h$ . On définit le modèle de bruit de  $u$  comme la différence d'images :

$$n(D_h, u) = u - D_h(u)$$

Le problème est donc le suivant. A partir d'une image originale avec du bruit, on cherche un algorithme de traitement de l'image réduisant l'intensité du bruit. Une méthode classique est d'utiliser la redondance d'informations dans l'image. Si on regarde plus près l'image avec du bruit de Lena (Figure 6.1(b)), le voisinage d'un pixel possède des valeurs en niveau de gris assez proches. En tenant compte de l'information du voisinage on peut donc en déduire le niveau de gris du pixel que l'on traite. Bien sur ceci n'est pas vrai à proximité d'un contour, ce qui fera l'objet d'une étude plus attentive ci-après.

**Définition 6.2.2** *Convolution*

Soit  $I(i, j)$  l'intensité d'un pixel dans une image,  $\mathcal{V}$  le voisinage de  $I(i, j)$  et  $h$  une fonction de poids qui à tout point  $(m, n) \in \mathcal{V}$  associe un réel  $h(m, n)$  tel que :

$$\sum_{(m,n) \in \mathcal{V}} h(m, n) = 1$$

On appelle  $I'(i, j)$  l'intensité de couleur filtrée par  $h$  la valeur :

$$I'(i,j) = \sum_{(m,n) \in \mathcal{V}} h(m,n) I(i-m, j-n) \quad (6.2)$$

### 6.2.2 Filtres Moyenneurs

La fonction  $h$  est appelée masque de convolution, c'est-à-dire qu'elle associe à un voisinage réduit de l'intensité traitée une valeur et on calcule la moyenne à l'aide de ces valeurs.

Le masque le plus simple que l'on peut utiliser est la masque  $3 \times 3$  :

$$h = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce masque regarde un voisinage réduit d'un pixel et calcule la moyenne des niveaux de gris. Cette méthode va réduire l'intensité du bruit dans l'image, sous la condition que les dégradations sont de dimensions inférieures aux objets de l'image. Dans le cas où elles seraient supérieures, la moyenne va prendre en compte trop de bruit dans un voisinage et le filtre va ajouter du bruit supplémentaire. Un autre type de bruit va être ajouté dans l'utilisation des filtres moyenneurs. Au niveau des contours sur les points limites entre deux zones de couleurs distinctes, les couleurs vont être atténuées ce qui donne un effet de flou à l'image. C'est précisément cet effet que l'on cherchera à réduire. Pour limiter cet effet, il existe des masques de convolutions plus adaptatifs pour préserver les contours. Dans cette section, on rappelle les méthodes classiques, on laissera en référence quelques méthodes plus poussées de réduction de bruit.

La méthode la plus classique de réduction de bruit est l'application de masques gaussiens. On part de l'hypothèse que le bruit additif sur l'image est inférieur aux dimensions des objets présents. On veut limiter les effets de bord tout en réduisant de façon significative le bruit. On calcule des masques de convolutions qui vont tenir compte de la distance des voisins par rapport aux pixels que l'on traite. C'est une application directe de la loi normale, les poids du masque  $h$  seront d'autant plus faibles que les pixels seront éloignés.

#### Définition 6.2.3 Distribution normale

La distribution normale 2D isotropique  $G(x,y)$  d'écart type  $\sigma$  est de la forme :

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

On peut donc calculer les masques de tailles  $3 \times 3$  et  $5 \times 5$  associés à cette distribution :



$$h_1 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \frac{1}{273} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 26 & 16 & 4 \\ 7 & 26 & 41 & 26 & 7 \\ 4 & 16 & 26 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

On propose à titre d'exemple une application de ces masques sur un détail de l'image de Lena pour mieux entrevoir les problèmes de flous précédemment évoqués. Regardons l'œil de Lena Fig 6.2(a). On applique respectivement un filtre moyennneur Fig 6.2(b), et des masques gaussien de taille 3x3 et 5x5 Fig 6.3(a) et Fig 6.3(b).



(a) Zoom sur l'œil de Lena



(b) Application d'un masque 3x3 moyennneur

FIGURE 6.2 : Zoom sur un détail de l'œil de Lena. L'image de gauche est obtenue à partir de l'image classique auquel on ajoute un bruit additif gaussien. L'image de droite est le résultat après application d'un masque moyennneur. Le flou obtenu est très important et malgré la réduction importante du bruit on a perdu une partie des détails de l'œil.

Le filtrage isotrope gaussien a été introduit par Gabor en 1960 [LFB94]. Il démontre que les masques gaussiens sont optimaux dans les parties régulières de l'image (Théorème 6.2.4), mais comme on a pu le voir précédemment, à proximité d'un contour, la convolution va réduire la netteté.

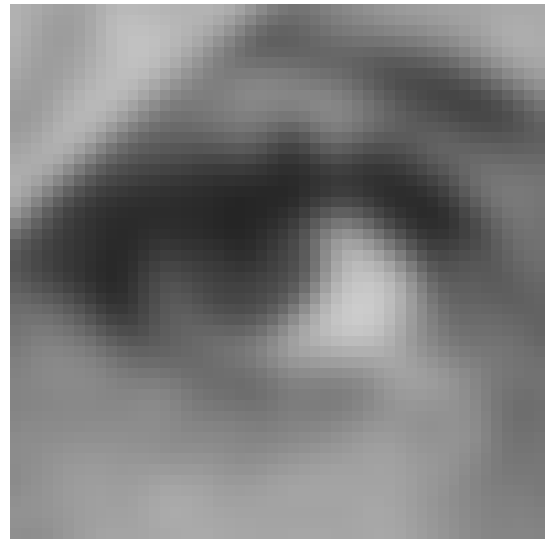
**Théorème 6.2.4** *Gabor 1961 [LFB94]*

*La méthode de débruitage d'une image utilisant les masques gaussiens de convolution satisfait :*

$$u - G_h * u = -h^2 \Delta u + o(h^2)$$



(a) Application d'un masque 3x3 Gaussien



(b) Application d'un masque 5x5 Gaussien

FIGURE 6.3 : Zoom sur un détail de l'œil de Lena. On applique à l'image avec du bruit de Lena deux masques de convolutions gaussiens de taille 3x3 pour l'image de gauche et 5x5 pour l'image de droite. Plus la taille du masque est importante, plus les effets de flous aux niveaux des contours sont importants. Là encore, on a réduit de façon considérable le bruit au détriment de la netteté des contours.

avec  $h$  l'écart type du masque,  $u$  est l'image originale sans bruit,  $G_h$  le masque gaussien d'écart type  $h$ .

### 6.2.3 Filtres Médiants

les masques médians sont un autre types de masques en traitement d'images. Dans le section précédente, les masques gaussiens ne donnent pas des résultats pleinement satisfaisants pour la réduction de bruit. Sur les zones de fortes variations lumineuses, le masque gaussien détruit la netteté des contours et donne un effet de flous au niveau du bord de l'image. Ce traitement peut être vu comme du bruit supplémentaire ajouté à l'image.

La construction des masques gaussiens permet de limiter cet effet de flou en réduisant la moyenne aux voisins les plus éloignés de celui qui est traité. Néanmoins, comme le montre l'exemple Fig 6.3(b), dès que la taille du voisinage augmente, on perd beaucoup d'informations au niveau des détails.

Les masques gaussiens filtrent les intensités de couleurs indépendamment les uns des autres. Or pour préserver les contours, le masque devrait s'adapter suivant qu'il se trouve sur un contour ou sur une zone où le gradient de couleur est très faible.

Le principe des masques médians est de tenir compte de la position du pixel que l'on

traite. Si l'on considère un voisinage  $\mathcal{V}$  du pixel, on regarde les intensités de couleurs que l'on trie par ordre croissant et on prend la valeur médiane que l'on réaffecte au pixel.

Par exemple, soit le voisinage  $\mathcal{V}$  suivant :

30	0	140
( 10	20	180)
210	50	200

Le pixel en cours de traitement possède une intensité de couleur de 20 ( On suppose que l'image est en niveau de gris donc des intensités comprises entre 0 et 255). On trie les valeurs du voisinage par ordre croissant :

$\mathcal{V} = \{0, 10, 20, 30, 50, 140, 180, 200, 210\}$

La valeur médiane est de 50 ce qui donne le nouveau voisinage suivant :

30	0	140
( 10	50	180)
210	50	200

Si l'on compare avec un filtre moyenneur, le calcul de la moyenne donne une valeur centrale de 93. Par rapport à un masque gaussien on obtient une valeur centrale de 71. Immédiatement on constate la différence significative entre le masque moyenneur qui va flouter de façon très importante le contour et le masque médian qui tient compte de façon plus adaptées des valeurs de son voisinage. Par rapport aux valeurs trouvées avec le masque gaussien et le masque moyenneur, on voit que ces deux masques ont tendances à déborder. C'est ce qui donne cet effet de flou à l'image.

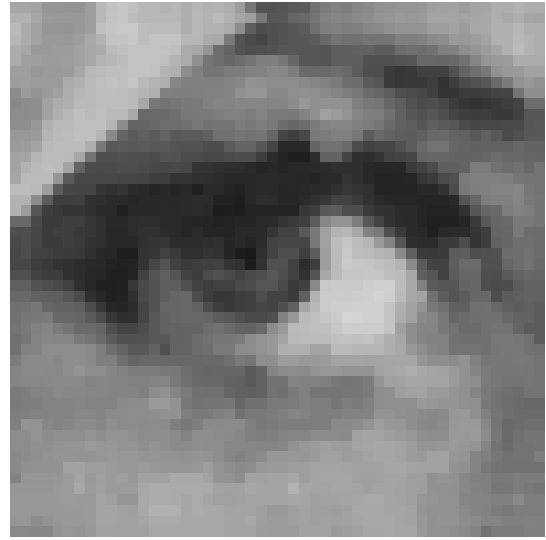
On montre à titre d'exemple une application du filtre Médian que l'on compare au filtre gaussien précédemment définis. Sur l'image Fig 6.4(a) on avait remarqué le flou caractéristique au niveau des contours. En comparant avec l'image Fig 6.4(b), on peut voir au niveau de l'œil que les couleurs sont également plus vives moins atténués et que les contours sont mieux préservés.

### 6.3 Filtres basés sur les équations aux dérivées partielles

Les deux exemples présentés ci-dessus, sont les exemples les plus classiques et les plus simples de traitement du signal. Il existe dans la littérature de grands nombres de méthodes de réductions de bruit et il est donc difficile de faire un état de l'art exhaustif. Trouver une méthode efficace pour réduire l'intensité du bruit et retrouver l'image originale est encore un challenge très actif dans la communauté de l'imagerie. D'après le théorème de Gabor (Théorème 6.2.4), on sait que la convolution gaussienne est optimale sur les parties régulières. Le principe des masques anisotropes est de réduire l'effet de flou en utilisant une direction orthogonale de convolution au contour.



(a) Application d'un masque 3x3 Gaussien



(b) Application d'un masque Médian 3x3

FIGURE 6.4 : Zoom sur un détail de l'œil de Lena. On applique un masque gaussien sur l'image de gauche et un masque 3x3 médian sur l'image de droite. On remarque que les contours sont plus nets sur l'image de droite, et que les couleurs sont moins atténuées.

### 6.3.1 Modèle de Perona et Malik

Introduit dans leur article [PM90], Pietro Perona et Jitendra Malik proposent en 1990, un modèle de réduction de bruit basé sur la diffusion anisotrope dans une image. Leur idée est de proposer une diffusion non-linéaire qui préserve les parties fines et les contours en adaptant l'intensité de la diffusion selon la zone rencontrée. Pietro Perona et Jitendra Malik proposent de limiter l'intensité du lissage dans les zones où les variations de gradient sont les plus importantes. On choisit  $g$  la fonction de diffusivité et on a une équation de diffusion dépendant de  $g$  :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \operatorname{div}(g(|\nabla U|) \cdot \nabla U) \quad (6.3)$$

On notera  $g_K$  la fonction de diffusion, dépendant d'un certain paramètre  $K$  appelé seuil du gradient. A titre d'exemple prenons la partie d'une image avec les zones d'intensités suivantes :

30	140	140
30	140	150
30	30	140

Si l'on calcule les différences d'intensités entre chaque valeur par rapport au pixel central on trouve :

-110	0	0
-110	0	10
-110	-110	0

On propage la valeur d'un voisin si la différence d'intensité est faible. La valeur finale sera donc :

$$\text{Valeur}_{x,y} = \text{Valeur}_{x_1,y_1} g(\nabla_1) + \text{Valeur}_{x_2,y_2} g(\nabla_2) + \dots + \text{Valeur}_{x_8,y_8} g(\nabla_8)$$

Dans leur article de 1990, ils proposent deux fonctions de diffusion :

$$g_K(|\nabla U|) = e^{-\left(\frac{|\nabla U|}{K}\right)^2} \quad (6.4)$$

qui est une fonction gaussienne et

$$g_K(|\nabla U|) = \frac{1}{1 + \left(\frac{|\nabla U|}{K}\right)^2} \quad (6.5)$$

Le paramètre  $K$  sert à fixer le seuil de limitation de la diffusion, c'est-à-dire trouver le juste milieu entre les fortes variations du gradient liées au bruit et celles liées à la présence d'un contour. Le choix du paramètre  $K$  est donc particulièrement important. Dans leur article, Pietro Perona et Jitendra Malik [PM90] déterminent le paramètre  $K$  grâce à l'histogramme cumulé des gradients, ou alors sur une connaissance à priori des données par un utilisateur. D'autres méthodes plus statistiques existent sur la moyenne des gradients [Whi93] ou sur la médiane. Le paramètre  $K$  dépend de l'image et des fortes variations du gradient sur celle-ci.

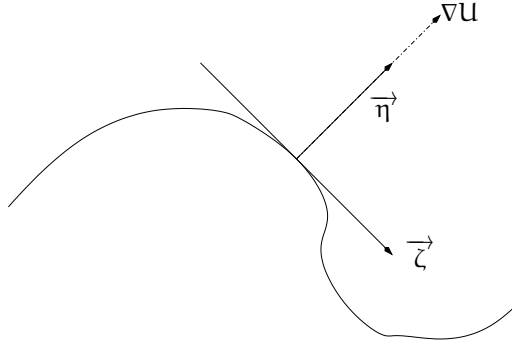


FIGURE 6.5 : Base locale à proximité d'un contour.

Une analyse classique de la méthode de lissage de Perona et Malik est de se placer en un point et d'étudier la diffusion le long du contour. On construit (Figure 6.5) une base locale orthonormée  $(\vec{\zeta}, \vec{\eta})$  en un point du contour.

Pour simplifier l'écriture, notons  $U_x$  et  $U_y$  la dérivée de la fonction  $U$  respectivement en  $x$  et  $y$

$$(\vec{\zeta} = (\frac{U_y}{|\nabla U|}, \frac{U_x}{|\nabla U|}), \vec{\eta} = (\frac{U_x}{|\nabla U|}, \frac{U_y}{|\nabla U|}))$$

Dans cette nouvelle base on décompose la relation 6.3 :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = c_{\zeta} U_{\zeta} + c_{\eta} U_{\eta\eta} \\ c_{\zeta} = g(|\nabla U|) \\ c_{\eta} = g(|\nabla U|) + |\nabla U| g'(|\nabla U|) = \phi'(|\nabla U|) \end{cases}$$

La fonction  $\phi'$  est définie comme étant la fonction de flux. En effet, en fonction de la direction du gradient, la diffusivité sera contrainte, ce qui entraine dans la direction tangentielle au contour un rehaussement de celui-ci. Dans certain cas, si le bruit est important, le filtre peut alors rehausser le contraste du bruit environnant et donc l'augmenter de façon conséquente. Pour ces raisons Francine Catté, Pierre-Louis Lions, Jean-Michel Morel et Tomeu Coll [CLMC92] proposent une fonction de régularisation lissée :

$$g_{K,\sigma}(|\nabla U|) = e^{-\left(\frac{|\nabla U| * G_{\sigma}}{K}\right)^2} \quad (6.6)$$

avec  $G_{\sigma}$  est une fonction gaussienne d'écart type  $\sigma$ . Ce type de filtre réduit l'intensité du bruit, mais les structures fines de tailles inférieures à la largeur de la gaussienne sont elles-mêmes réduites.

Un autre problème peut intervenir sur une image dont les variations du niveau de gris à proximité d'un contour sont relativement faibles. Dans le papier [ALM92], Luis Alva-

rez, Pierre-Louis Lions et Jean-Michel Morel proposent en 1992 une approche basée sur la courbure moyenne pour construire un filtre non-linéaire :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = g(|G_\sigma * \nabla U|) [(1 - h(|\nabla U|))\Delta U + h(|\nabla U|)|\nabla U| \operatorname{div}\left(\frac{\nabla U}{|\nabla U|}\right)] \quad (6.7)$$

avec  $g$  la fonction décroissante qui contrôle la diffusion et  $h$  est une fonction de lissage telle que  $h(s) = 0$  si  $s \leq e$  et  $h(s) = 1$  si  $s \geq 2e$ . Le paramètre  $e$  dépend du seuil de la fonction  $g$ . La fonction  $h$  sert à contrôler la diffusion dans la direction du gradient. Le lissage ainsi défini est sélectif puisque les composantes tangentielles et les composantes normales au contours sont traitées séparément. Si la variation du gradient est inférieure à la valeur de seuil  $e$ , alors la diffusion est isotrope et on a une plus forte réduction du bruit. Inversement si la variation du gradient est supérieure au seuil  $e$ , alors la diffusion est anisotrope et le lissage est effectué tangentiellement au contour pour ne pas le détruire.

En reprenant les notations de leur article, Antoni Buades, Bortomeu Coll et Jean Michel Morel [BCM10] montrent que les méthodes basées sur les filtres anisotropes dépendent de la courbure moyenne d'une image.

**Théorème 6.3.1** *Buades, Coll, Morel 2010 [BCM10]*

*Soit un filtre anisotrope (AF) alors la méthode de débruitage satisfait :*

$$U(x) - AF_h U(x) = \frac{1}{2} h^2 \nabla U \operatorname{curv}(u)(x) \quad (6.8)$$

*pour  $\nabla U \neq 0$  et  $\operatorname{curv}(u)(x)$  représente la courbure de la ligne de niveau passant par le pixel  $x$ .*

### 6.3.2 Filtre de Kuwahara

Les méthodes basées sur le modèle de Perona-Malik permettent la construction de filtres préservant les contours. Les reproches que l'on peut faire à ce type de filtres, c'est la nécessité de connaissance d'un paramètre permettant de régler la diffusion à proximité d'un contour. Les travaux de Kuwahara en 1970, proposent une famille de filtres moyens qui restreignent les pixels concernés par la convolution dans un voisinage donné. Le filtre de Kuwahara [Bak02] est de tenir compte des pixels des deux zones séparées par un contour en même temps. De ce fait, la moyenne est donc atténuée, engendrant un effet de flou. Pour rehausser les contours tout en effectuant la moyenne, Kuwahara propose de limiter la moyenne d'un pixel courant à une partie de son voisinage. On découpe le voisinage en quatre parties qui se superposent Figure 6.7.

Pour chaque sous-voisinage, on calcule la moyenne  $m_i$  ainsi que la variance  $s_i$  :



(a) Image avec bruit blanc de Lena



(b) Application d'un filtre Anisotrope

FIGURE 6.6 : Exemple d'application d'un filtre anisotrope sur l'image classique de Lena avec 20% bruit blanc.

$a_0$	$a_1$	$ab_0$	$b_0$	$b_1$
$a_2$	$a_3$	$ab_1$	$b_2$	$b_3$
$ac_0$	$ac_1$	$x$	$bd_0$	$bd_1$
$c_0$	$c_1$	$cd_0$	$d_0$	$d_1$
$c_2$	$c_3$	$cd_1$	$d_2$	$d_3$

FIGURE 6.7 : Découpage du voisinage pour un filtre de Kuwahara



$$s_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_j - m_i)^2 \quad (6.9)$$

La variance calculée est la plus faible pour les voisinages dont les valeurs sont les plus homogènes avec la valeur du pixel  $x$ . Les sous-voisinages qui contiennent un contour, auront une variance plus élevée, ce qui les éliminent dans la moyenne de la valeur centrale. D'autres travaux ont étudié des découpages en sous-voisinage plus complexes telle que des voisinages qui n'ont pas une forme carrée, comme ceux présentés Figure 6.7, en forme de losange, de cercle, avec un nombre de fenêtres de plus en plus important. Ce filtre possède la particularité de préserver les contours mais la taille du noyau choisie en fonction du type d'images et le niveau de bruit qui pose problème. Si l'image possède de nombreuses structures fines, ce filtre risque de les détruire, préservant ainsi les zones plus homogènes.



(a) Image avec bruit blanc de Lena



(b) Application d'un filtre de Kuwahara de taille  $5 \times 5$

FIGURE 6.8 : Exemple d'application d'un filtre Kuwahara sur l'image classique de Lena avec 20% bruit blanc.

### 6.3.3 Filtre basé sur les plus proches voisins

Un autre type de filtre basé sur le voisinage d'un pixel est le filtre basé sur les valeurs des plus proches voisins (Nearest neighbor). On découpe le voisinage de la même façon que pour le filtre de Kuwahara Figure 6.7, mais on prend la valeur la plus proche en terme

de distance avec la valeur du point traité. Ainsi on effectue la moyenne du pixel avec uniquement un voisin de chaque sous-voisinage dont les valeurs sont proches de la sienne.

Dans le cas d'un voisinage  $3 \times 3$  par exemple, on aura quatre valeurs.

30	140	140
30	140	150
30	30	140

Ainsi la valeur centrale sera égale à la moyenne de ces quatre valeurs. Cette méthode préserve les contours mais provoque un effet de flou lié aux valeurs prises dans chaque sous-voisinage : si le voisinage chevauche un contour, il peut apparaître une valeur très différente du pixel traité. La valeur du pixel sera donc plus atténuée que celle attendue, et l'effet de flou sera moins important qu'avec une méthode gaussienne classique.



(a) Image avec bruit blanc de Lena



(b) Application d'un filtre SNN de taille  $5 \times 5$

FIGURE 6.9 : Exemple d'application d'un filtre basé sur les valeurs des voisins les plus proches sur l'image classique de Lena avec 20% bruit blanc.

### 6.3.4 Conclusion

Dans cette introduction, on a présenté les méthodes les plus classiques pour réduire le bruit dans une image (voir Figure 6.10). Elles sont complémentaires : soit elles réduisent

de façon efficace le bruit tout en détruisant une partie du contour, soit elles préservent de façon plus efficace le contour mais la réduction de bruit est moins importante. Il y a donc un juste milieu à trouver entre la préservation du contour et la qualité de la réduction. Dans la littérature, un bon nombre de méthodes essaye de trouver un juste compromis entre la préservation des contours, c'est à dire renforcer la différence entre les couleurs de deux zones différentes (améliorations de contrastes), sans donner cette impression de flou à l'image, comme c'est le cas des méthodes basées sur le modèle de Perona et Malik [PM90] et les dérivées de cette méthode. Les filtres basés sur le voisinage, tel le filtre de Kuwahara et le filtre basé sur les plus proches voisins, permettent d'attribuer un poids plus fort aux voisins dont la valeur est proche du point traité. Ainsi, on détecte les points du voisinage appartenant à la même structure, pour pouvoir réduire l'intensité du bruit sans détruire les contours. Le modèle de Perona-Malik peut s'avérer peu efficace dans la réduction de bruit quand celui-ci est trop important. A défaut de le supprimer, le filtre peut le rehausser, ce qui n'est pas le cas des méthodes adaptatives de filtrages. Dans une région à traiter, on extrait un certains nombres d'informations pour limiter ou augmenter le support de filtrage ou la direction principale de diffusion. Nous proposons dans la section suivante, une application du Laplacien précédemment défini pour réduire de façon efficace le bruit. L'idée est similaire aux méthodes basées sur les équations aux dérivées partielles, puisqu'elle reprend la définition du Laplacien avec l'équation de diffusion discrète. On adapte cette définition à des images en niveau de gris, contraignant les marcheurs à se diriger vers les parties de l'image ayant la même structure que son point de départ. L'idée de cette méthode est de cumuler les avantages des méthodes basées sur le modèle de Perona-Malik ainsi que les méthodes basées sur la structure du voisinage. La méthode est ainsi adaptative en fonction de la région traversée par les marcheurs. Dans une région où les variations du gradient sont importantes les marcheurs «rebondiront» contre le contour pour se propager le long de celui-ci, le préservant ainsi du filtrage. Dans une zone où le bruit est important, le masque aura un comportement de type gaussien, et on aura donc un effet de filtre qui atténuera le bruit.

## 6.4 Application du Laplacien comme filtre moyennneur

Dans le Chapitre 4, on a proposé une définition du Laplacien sur une image binaire, c'est-à-dire une valeur de 1 pour les pixels présents et 0 si le pixel n'appartient pas aux données. La diffusion dépendait donc du voisinage pour les pixels donc les valeurs étaient de 1. Bien sur, sur une image en niveau de gris, les valeurs sont plus étendues, traditionnellement comprise entre 0 et 255. Le processus de diffusion peut être étendu à ce type de données, et on verra dans la galerie d'exemples l'efficacité de ce noyau de diffusion dans le cadre de réduction de bruit dans les images en niveau de gris.



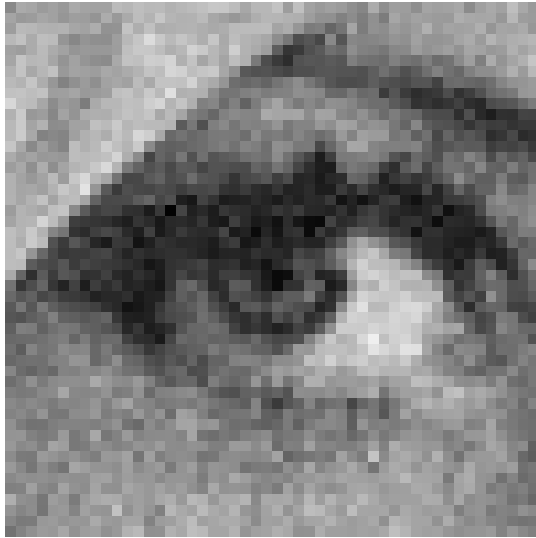
(a) Image avec bruit blanc de Lena

(b) Application d'un filtre SNN de taille  $5 \times 5$ 

(c) Application d'un filtre Anisotrope

(d) Application d'un filtre de Kuwahara de taille  $5 \times 5$ (e) Application d'un filtre basé sur le processus de diffusion discret de taille  $5 \times 5$ 

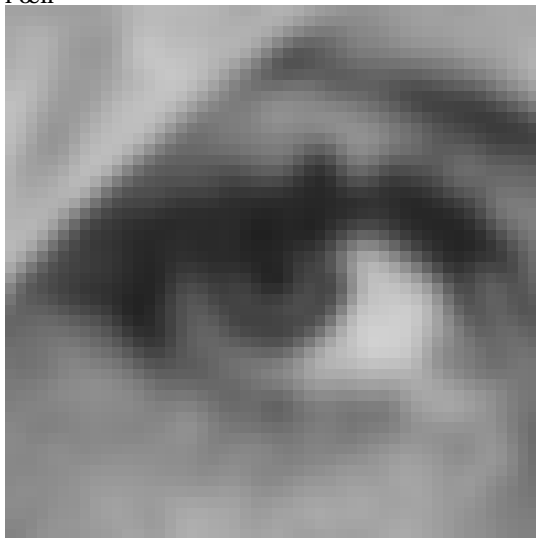
FIGURE 6.10 : Exemple d'application de filtres classiques sur l'image classique de Lena avec 20% bruit blanc.



(a) Zoom sur l'image de Lena. Détails bruité de l'œil



(b) Application du filtre adaptatif 3x3



(c) Application du filtre gaussien 3x3



(d) Application du filtre médian 3x3

FIGURE 6.11 : Une image classique en traitement du signal : Lena. Sur ce détail, on peut remarquer les différences entre les divers filtres utilisés. Le masque gaussien Figure 6.11(c) perd de l'information au niveau des détails et de la netteté, par contre le masque médian renforce les contours, mais on perd en qualité au niveau des détails (Figure 6.11(d)). Le masque adaptatifs réduit moins le bruit qu'un masque gaussien, mais une grande partie des détails est conservée et les parties fines (structures de l'œil) sont préservées.

### 6.4.1 Chaîne de Markov sur une Image en niveau de gris

On étend la définition de la chaîne de Markov sur des courbes binaires. Pour cela, on transforme l'image en deux dimensions en une surface en trois dimensions, donc chaque hauteur correspondant à la valeur en niveau de gris de l'image. C'est donc une surface dont les hauteurs varient entre 0 et 255, ou entre 0 et 1 si on normalise les valeurs. La marche aléatoire consiste désormais en une randonnée montagnaise. On laisse un marcheur se mouvoir sur la surface en relief. Les plus hautes valeurs en niveau de gris vont correspondre au direction de diffusion les plus fortes. Et tout comme un véritable randonneur, il sera aussi difficile de descendre dans une crevasse que de monter à pic.

Pour comprendre la construction du masque nous proposons un exemple. Soit  $\mathcal{V}$  le voisinage d'un pixel que l'on note  $p_i$ . Soit  $\{g_1, g_2, \dots, g_8\}$  les valeurs en niveau de gris du voisinage de  $p_i$ . Supposons que les valeurs du voisinage sont triées par ordre croissant. D'après ce qui précède, elles sont donc classées des valeurs les moins accessibles vers celles où le marcheur préférera se déplacer. Notons  $p_i^{(j)}$  le  $j$ -ième voisin de  $p_i$  avec la valeur en niveau de gris  $g_j$ .

On construit un masque de convolution du 8-voisinage de  $p_i$  itérative-ment. Puisque les valeurs en niveau de gris sont triées dans leur ordre d'importance, on traite les hauteurs de diffusion les unes après les autres. A chaque itération, on regarde le voisinage immédiat de  $p_i$ , on calcule la diffusion binaire sur ce voisinage, puis on multiplie les valeurs de transition par la valeur en niveau de gris la plus basse pour obtenir un masque dépendant du voisinage en cours et de la hauteur minimale sur laquelle se trouve le marcheur. Puis on supprime le pixel qui possède la plus faible hauteur du voisinage. On affine ainsi le voisinage étape par étape jusqu'à ce qu'il ne reste plus aucun pixel dans le voisinage. Les pixels avec les plus hauts niveaux de gris vont donc être pris en compte plus souvent que ceux avec les valeurs les plus basses. Le marcheur se déplacera donc plus volontiers dans les plus hautes valeurs.

Remarquons que si toutes les valeurs en niveau de gris sont identiques, il n'y aura qu'une seule itération, puisque l'on supprimera alors toutes les valeurs en même temps du voisinage. Une remarque similaire si toutes les valeurs sont différentes : on devra nécessairement construire huit masques parmi les  $2^8$  possibles. Le nombre d'itérations dépend du nombre de niveaux de gris différents dans le voisinage. Notons ce nombre  $\theta$ . Par ailleurs, les probabilités de transition calculés à chaque itération correspondent à la chaîne de Markov binaire proposée dans le chapitre précédent. Notons  $A_s^{(k)}$  la  $k$ -ième matrice de transition de l'ensemble.  $A_s^{(k)}$  correspond à la matrice du voisinage où au plus  $k$  voisins ont été supprimés.

Le masque de convolution final peut s'écrire sous la forme :



$$\text{Masque}(i) = \frac{\sum_{k=1}^{\theta_i} A_s^{(k)}(i) g_k}{\sum_{k=1}^{\theta_i} g_k}$$

Remarquons tout d'abord que de par sa construction, le masque a toutes ses valeurs comprises entre 0 et 1. En effet, il s'agit d'une moyenne pondérée des couleurs par des probabilités de transition calculées à partir de  $A_s$ , normalisées par la somme de toutes les couleurs du voisinage.

**Propriété 6.4.1** *Soit  $\Sigma$  un ensemble de pixels en niveau de gris. Soit  $p_i \in \Sigma$  tel que toutes les valeurs du voisinage  $\{g_1, g_2, \dots, g_8\}$  sont égales à celle de  $p_i$ , alors le masque est un masque gaussien*

**Démonstration :** Il s'agit d'une application de la formule précédente : Si toutes les valeurs du voisinage sont égales à celle du pixel  $p_i$ , on a  $\theta = 1$  et la formule se résume à :

$$\text{Masque}(i) = \frac{A_s(i) g_0}{g_0}$$

Or on a déjà démontré Chapitre 4 dans le Théorème 4.4.7 que  $A_s(i)$  suivait une distribution normale. Donc  $\text{Masque}(i)$  est un masque gaussien. □

Cette première propriété nous montre que la diffusion suit une distribution normale sur les parties régulières de l'image. Ce qui signifie que la réduction de bruit sera maximale si toutes les couleurs du voisinage sont égales. Bien sûr du fait que le masque s'adapte aux voisinages rencontrés, si les couleurs sont très différentes, c'est-à-dire que l'on s'approche d'un contour, les valeurs du masque seront différentes et la convolution sera limitée se qui réduira les effets de bord traditionnellement rencontrés avec des masques gaussiens. Le masque final de convolution peut-être vu comme une chaîne de Markov en une étape, dont les poids correspondent aux transitions d'aller du pixel du centre vers les autres pixels du voisinage. Nous proposons d'étudier en détail les résultats d'applications de ce masque à des images en niveau de gris avec plusieurs modes de bruit.

## 6.4.2 Exemples de construction de Masques et Comparaisons

La définition des masques adaptatifs sur une image en niveau de gris, nous donne une première propriété sur le comportement de la diffusion sur des zones homogènes de l'image. D'après la Propriété 6.4.1, on sait que, sur les zones dont les couleurs sont très proches les unes des autres, le comportement du masque sera sensiblement équivalent à

un masque de convolution gaussien introduit dans la section 6.2.2. Pourtant au niveau des contours, le masque médian semble proposer une meilleure alternative puisqu'il préserve les contours. Le but de cette partie est de présenter la construction de divers masques auto-adaptatifs sur des voisinages 3x3 pour voir les différents comportements et pour pouvoir les comparer aux masques classiques précédemment introduits.

On propose la construction de deux masques différents que l'on va comparer aux masques médians et gaussiens précédemment introduits.

Soit  $p_i$  le pixel d'une image dont le voisinage centré en  $p_i$  possède les intensités de couleurs suivantes :

30	140	140
30	140	150
30	30	140

Le calcul du masque est basé sur le tri par ordre croissant des valeurs en niveau de gris. On remarque qu'il y a trois valeurs en niveau de gris distinctes sur l'image.  $\theta = 3$ .

La valeur du voisinage la plus petite est 30 : le premier masque binaire de diffusion est :

$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Puis on supprime tous les pixels du voisinage dont le niveau de gris est de 30 :

30	140	140
30	140	150
30	30	140

On obtient le nouveau voisinage suivant :

140	140
140	150
	140



La diffusion ne tient plus compte que des cinq pixels restants. La distribution est donc :

$\frac{9}{48}$	$\frac{3}{48}$
$\frac{25}{48}$	$\frac{7}{48}$
	$\frac{4}{48}$

On supprime les trois pixels dont l'intensité est 140. On garde évidemment le pixel en cours de traitement :

140	140
140	150
	140

Enfin, le dernier masque obtenu :

$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
---------------	---------------

Pour obtenir le masque final de convolution on fait la somme de tous les masques pondérés par la couleur du niveau traité. Cette méthode fonctionne par niveau, les dernières valeurs sont donc celles les plus favorisées pour la diffusion.

0.0196	0.039	0.0617
0.039	0.477	0.158
0.0196	0.134	0.0512

Avec l'aide de ce masque on compare le résultat de la convolution avec les trois autres masques présentés ci-dessus. Sur cet exemple Figure 6.12(a), on calcule à l'aide du masque adaptatif le résultat du pixel du centre. On remarque que celle-ci reste très élevée contrairement au masque gaussien (Figure 6.12(c)) et au masque moyennneur (Figure 6.12(b)). Néanmoins le masque médian reste celui qui préserve le mieux le contour (Figure 6.12(d)).

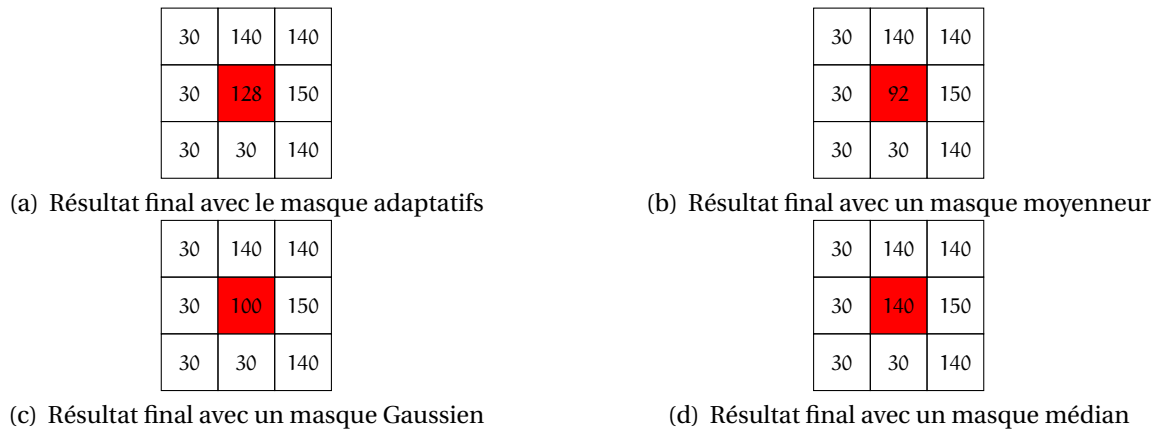


FIGURE 6.12 : Comparaison du résultat du lissage à partir de différents masques de convolution sur un exemple. On retrouve ici la préservation du contour grâce au masque médian, et remarquons que le masque adaptatif floute beaucoup moins le contour que le masque gaussien.

Ce premier exemple est la représentation d'un contour. Il apparait clairement deux zones : celle dont les pixels ont une intensité de 30 et celle dont les pixels ont une intensité supérieure à 140. Le masque médian de ce fait, est le plus approprié puisque c'est celui qui conserve le mieux les contours. Remarquons tout de même que le masque adaptatif donne une moyenne beaucoup plus proche de celle du masque moyennneur ou du masque gaussien.

Le second exemple est celui d'une partie fine dans une image :

0	0	255
0	255	0
255	0	0

Le masque adaptatif se calcule en seulement deux itérations puisqu'il y a seulement deux couleurs différentes. On obtient donc après calcul le masque suivant :

0.0208	0.0416	0.104
0.0416	0.583	0.0416
0.104	0.0416	0.0208

Les résultats d'application de ce masque sont visibles Figure 6.13(a). Le résultat obtenu est que le masque adaptatif préserve les parties fines contrairement aux masques médians qui les détruisent complètement (Figure 6.13(d)). Le masque gaussien et le masque moyennneur atténuent de façon flagrante cette partie fine, ce qui, au fur et à mesure des itérations la fera complètement disparaître.

0	0	255
0	202	0
255	0	0

(a) Résultat final avec le masque adaptatifs

0	0	255
0	85	0
255	0	0

(b) Résultat final avec un masque moyennneur

0	0	255
0	95	0
255	0	0

(c) Résultat final avec un masque Gaussien

0	0	255
0	0	0
255	0	0

(d) Résultat final avec un masque médian

FIGURE 6.13 : Comparaison du résultat du lissage à partir de différents masques de convolution sur un exemple. De façon très nette, on remarque que le masque adaptatifs préserve les parties fines. Le masque médian en revanche détruit les parties fines, et le masque gaussien atténue la valeur.

## 6.5 Résultats

### 6.5.1 Applications au débruitage d'images en niveau de gris

Dans la section précédente, les masques de convolution proposés se comportent comme des masques gaussiens sur des parties régulières d'une image. D'après le mode de construction, il s'agit d'une chaîne de Markov dont les probabilités de transition sont calculées à partir des valeurs en niveau de gris d'un voisinage. Les marcheurs se baladant sur la surface en trois dimensions engendrées par l'image en niveau de gris, préféreront aller vers les plus hautes valeurs et délaissant les plus faibles. Dans ce contexte, les masques de convolution proposés vont donc s'adapter d'eux même aux niveaux de gris du voisinage. On propose dans cette section une galerie d'images traditionnelles en analyse d'images, ainsi que d'autres images présentant des caractéristiques particulières. Ces images ont deux types de bruit, le bruit blanc et le bruit éparé. Ce qu'on appelle le bruit blanc, est

le bruit le plus classique rencontré en traitement du signal. Il s'agit d'un processus aléatoire dont la densité spectrale suit une loi normale. Le bruit épars consiste en un mélange des pixels locaux.

On compare nos résultats avec différentes méthodes de réductions de bruit. Les images que l'on choisit de traiter ici sont soit des images classiques comme c'est le cas avec Lena 6.1(a) et le Mandrill 6.14(a), ou alors des images qui possèdent des éléments caractéristiques permettant de mesurer la fiabilité de la méthode. On précisera pour chaque image, les caractéristiques qu'il est important de préserver.

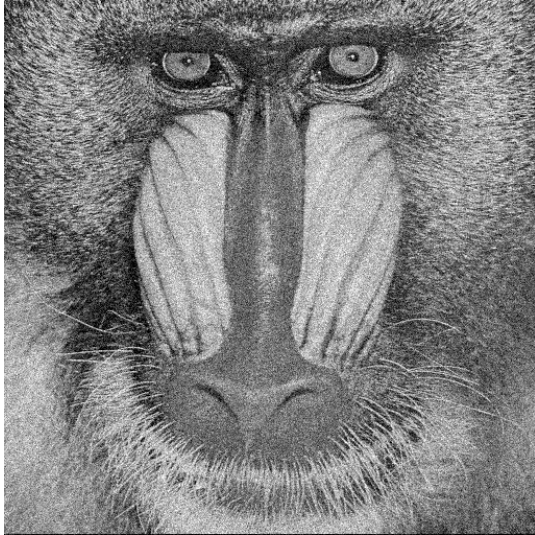
On présente Figure 6.11(a) un zoom sur un détail de l'image de Lena. Sur cette image, on applique différents filtres de réduction de bruit pour voir le comportement de chacun des filtres que l'on compare au filtre adaptatif.

Un autre exemple du débruitage en utilisant le filtre adaptatif Figure 6.15. Les lettres manuscrites ont un intérêt tout particulier. La structure fine doit être préservée malgré la forte présence de bruit blanc sur l'image. Avec un filtre gaussien Figure 6.15(b), la réduction du bruit est optimale dans les parties plates de l'image, mais aux abords des lettres, l'effet de flou engendré, rend les lettres presque illisibles. Le masque médian Figure 6.15(c) est dans ce cas ci, plus adapté avec une meilleure préservation des lettres mais une réduction du bruit moindre dans les parties autour. Le filtre basé sur la transformée de Fourier Figure 6.15(d), est avec le bon paramétrage très intéressante, renforce à la fois les contours des lettres et supprime une partie du bruit. Enfin le masque adaptatif prend ici tout son sens Figure 6.15(e) : sur les parties plates de l'image, le comportement gaussien permet une filtrage quasi optimal du bruit. De même que sur les lettres. Aux abords des contours, un renforcement très net des lettres permet un meilleur rendu visuel.

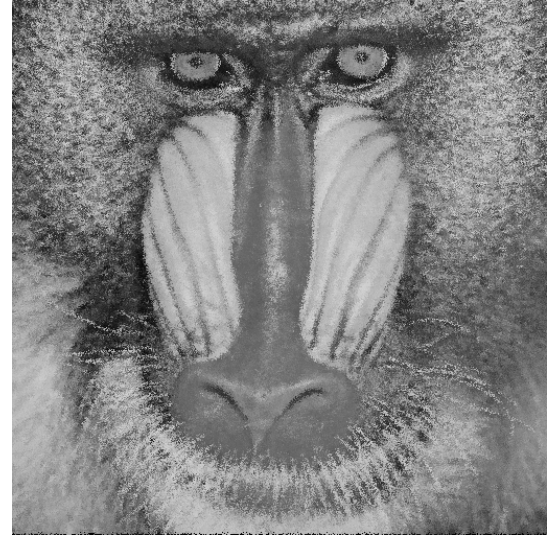
### 6.5.2 Optimisation par courbes de niveaux

Le filtre adaptatif est basé sur la diffusion de marcheurs dans les parties blanches de l'image. Ce qui veut dire qu'un changement important brusque entre deux couleurs sera détecté pour une image en niveau de gris. Cependant, on pourrait avoir besoin de juste-limiter les marcheurs dans les parties blanches de l'image pour préserver une structure en gris. La méthode telle que présentée sous-entend que les marcheurs vont systématiquement aller dans les niveaux de gris de plus hautes valeurs. Mais en réalité ce choix n'a pas d'importance. L'avantage de ce filtre c'est que l'on peut calculer les valeurs de la diffusion sur n'importe quelle image dont les niveaux de gris codent l'intérêt. Et en particulier sur une image dont on cherche à préserver une structure particulière. Une fois la table des masques calculée pour chacun des points, il suffit d'appliquer ces masques à l'image initiale. De cette façon on autorise les marcheurs à aller où l'utilisateur souhaite qu'ils aillent.

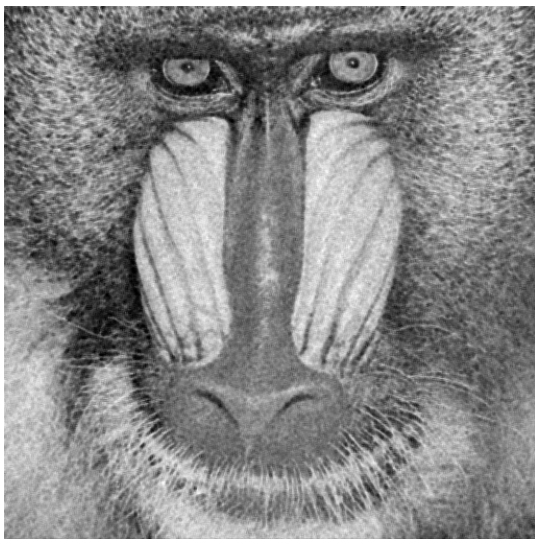
Un exemple de création de ces masques est donné Figure 6.16. On présente ici une image très intéressante pour réduire l'intensité du bruit : un paon. Sur cette image avec du bruit blanc, il faut noter l'importance et l'abondance des parties et structures fines que ce soit des plumes, la structures circulaires des yeux des plumes et les petites plumes sur



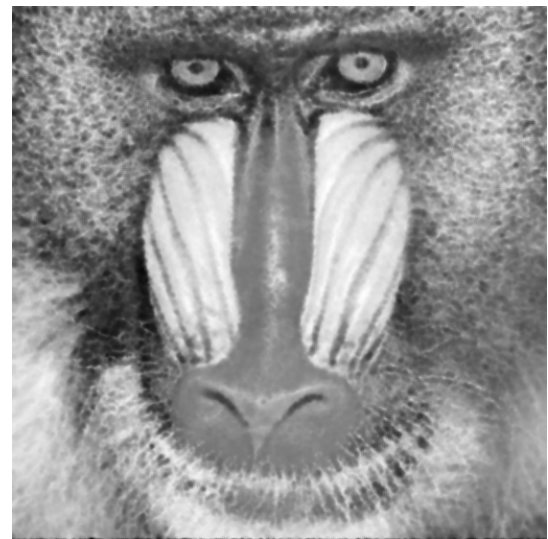
(a) Image classique du Mandrill avec bruit blanc



(b) Image classique du Mandrill avec bruit épars



(c) Image convolé du Mandrill avec bruit blanc utilisant un filtre adaptatif

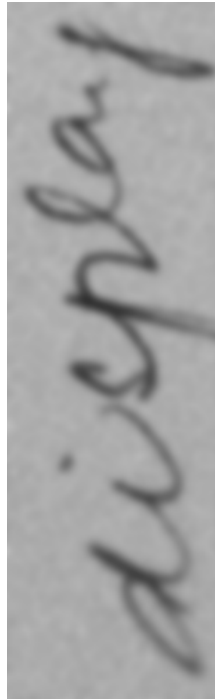


(d) Image convolé du Mandrill avec bruit épars utilisant un filtre adaptatif

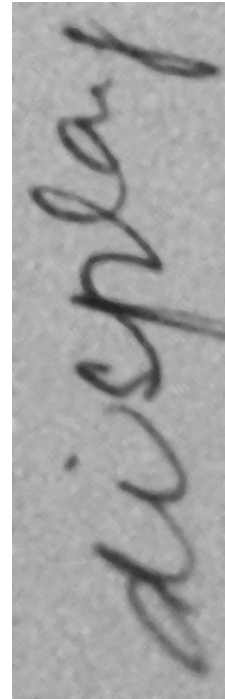
FIGURE 6.14 : Une image classique en traitement du signal : le Mandrill. Cette image possède plusieurs caractéristiques pour tester la viabilité des méthodes de traitement du signal, notamment les structures fines tels que les poils de la barbiche et la structure nasale. C'est donc un parfait exemple d'applications des masques adaptatifs. Sur l'image de gauche du bruit blanc a été ajouté, sur l'image de droite du bruit épars.



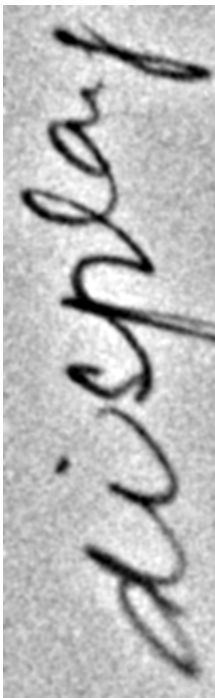
(a) Détails d'une lettre manuscrite avec bruit blanc



(b) Réduction du bruit en utilisant un filtre gaussien



(c) Réduction du bruit en utilisant un filtre médian

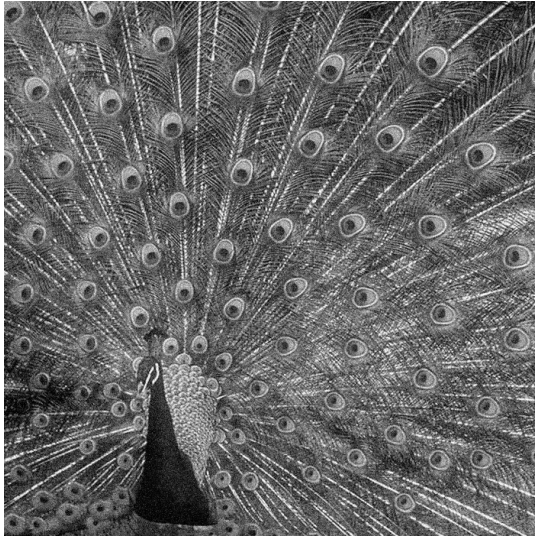


(d) Réduction du bruit en utilisant un filtre basé sur la transformée de Fourier

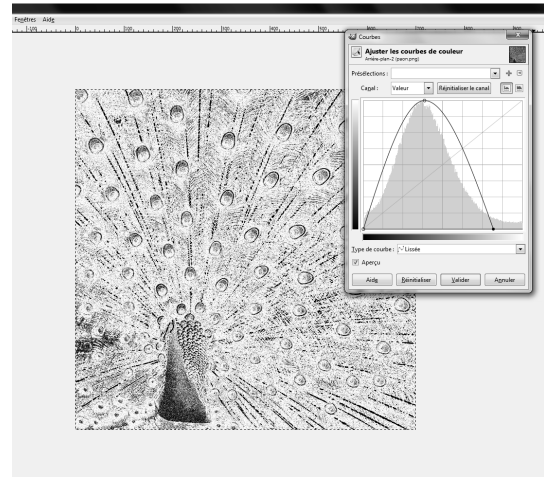


(e) Réduction du bruit en utilisant un filtre adaptatif

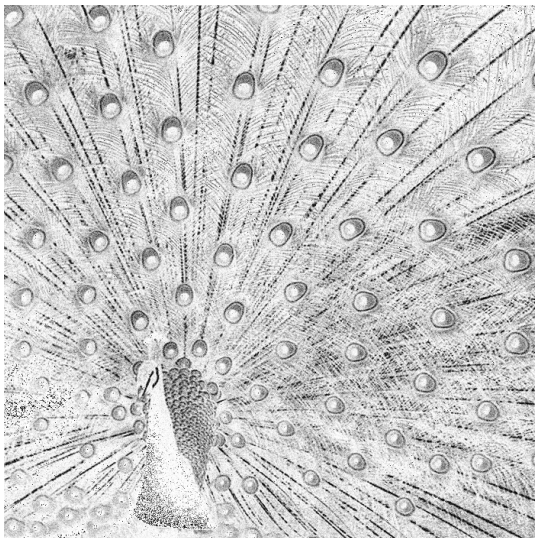
FIGURE 6.15 : Comparaison avec divers filtres classiques de réduction de bruit sur un extrait de lettres manuscrites



(a) Image d'un paon avec bruit blanc



(b) Création sous THE GIMP d'une zone image pour cibler les zones d'intérêt.



(c) Image support de la convolution

FIGURE 6.16 : Création d'une image support en utilisant la courbe des couleurs. Sur cette image de paon, on souhaite préserver la structure fine et les yeux des plumes. Pour optimiser la convolution, les zones d'intérêts sont mises en noir en jouant sur la balance des niveaux de gris, de façon à construire des masques de convolution qui tiennent compte de ces zones.

le dos du paon (Figure 6.16(a)). Ces structures apparaissent dans plusieurs niveaux de gris moyen. A l'aide de GIMP Figure 6.16(b), on transforme l'image en mettant en noir les zones particulièrement fines que l'on souhaite préserver par sélection du codeur. De cette façon Figure 6.16(c), on a une image support qui permettra de construire des masques de convolution qui tiennent compte de ces zones importantes. L'idée est qu'aux abords des zones en noir, les marcheurs ne se déplacent pas facilement sur ces zones et donc on les préserve du lissage.

### 6.5.3 Comparaison avec les méthodes classiques

On applique la méthode précédente sur l'image déjà présentée ci-dessus, du paon avec bruit blanc. Cette image n'est pas classique en soit en analyse d'image, mais elle permet de mettre en avant les limites de certaines méthodes. Cette image présente une multitude de parties fines à cause des plumes et le bruit supplémentaire est tout simplement catastrophique pour réduire l'intensité du bruit sans les détruire. Sur la Figure 6.17, on présente l'image originale du paon Figure 6.17(a) ainsi que l'image support utilisée pour optimiser le calcul Figure 6.17(b). C'est en utilisant cette image support que l'on obtient le résultat final Figure 6.17(c).

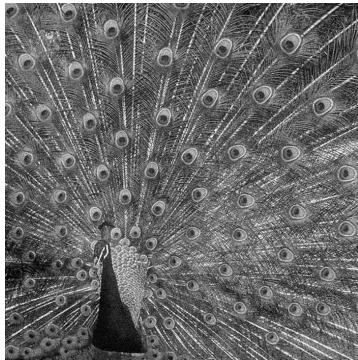
Pour bien sentir les différences avec les différentes méthodes proposées, on effectue un zoom sur une partie particulière de l'image Figure 6.17(d). L'utilisation d'un masque gaussien dans ce cas précis est évidemment à proscrire les parties fines étant en surnombre, on a donc avec ce masque une perte très importante des informations Figure 6.17(e). De la même façon Figure 6.17(g), on n'a retiré aucun bruit sur cette image mais en revanche on a réussi à faire ressortir les parties fines des plumes. Enfin on compare le filtrage anisotrope avec le lissage adaptatif puisque comme on a pu le voir précédemment ces méthodes sont relativement liées. On remarque que le filtrage anisotrope détruit certaines parties fines de l'image, alors que le filtre adaptatif réduit de façon conséquente le bruit tout en renforçant les contours des yeux des plumes et de leurs structures. On a donc une réduction du bruit très importante avec un renforcement des contours presque aussi important que la méthode des renforcement. Le filtrage adaptatif constitue donc un masque intéressant pour la réduction du bruit sur ce type d'images.

## 6.6 Application en astrophysique à la détection de sources ponctuelles

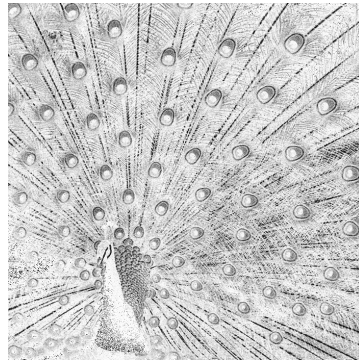
### 6.6.1 Contexte et données d'acquisition

L'opérateur Laplacien permet de préserver les contours tout en réduisant le bruit de façon optimale sur les parties régulières d'une image. En analyse d'images de rayon gamma en astronomie, une source importante de bruit liée à l'acquisition, peut masquer des

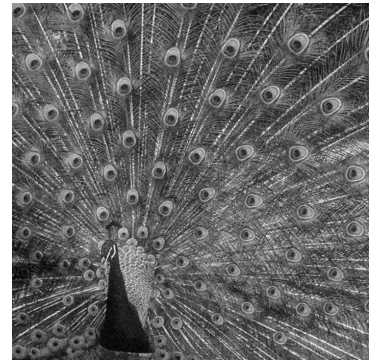




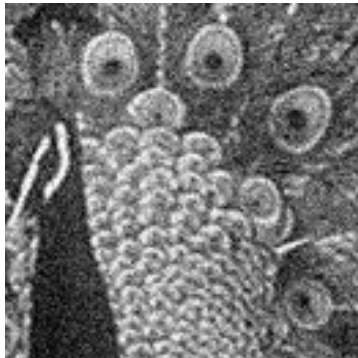
(a) Image d'un paon avec bruit blanc



(b) Image support de la convolution



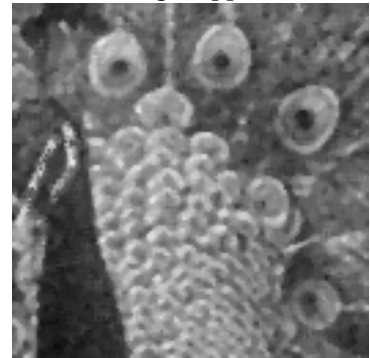
(c) Convolution adaptative utilisant une image support



(d) Zoom sur un détail du paon.



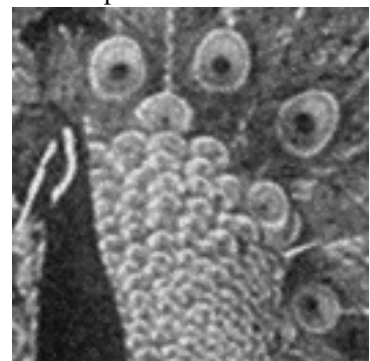
(e) Utilisation d'un masque gaussien



(f) Convolution avec masque anisotrope



(g) Convolution en renforçant la netteté de l'image



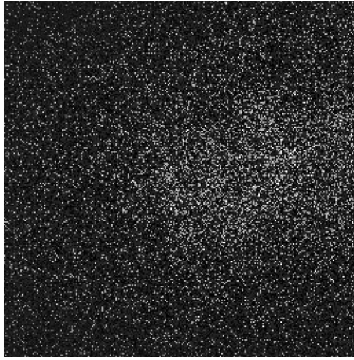
(h) Convolution en utilisant le Laplacien adaptatifs

FIGURE 6.17 : Comparaison entre diverses méthodes de convolution sur l'image d'un paon avec bruit blanc.

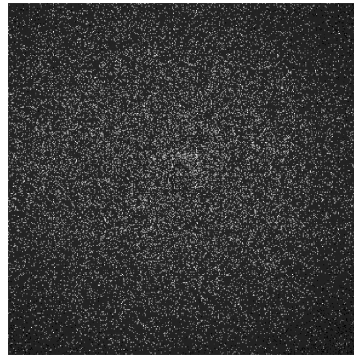
sources ponctuelles d'étoiles. Un des problèmes important est d'évaluer de façon statistiques la pertinence des résultats de la détection des sources de rayon gamma après analyse et réduction du bruit de fond. C'est dans ce contexte que l'on souhaitait appliquer l'opérateur Laplacien pour détecter des sources de rayon gamma. Notre idée est que les émissions de rayon gamma représente des parties fines dans l'image d'acquisition, alors que le bruit de fond est réparti de façon aléatoire dans l'image. Par application du filtre, on espère donc réduire le bruit de fond et renforcer les structures fines, et donc par suite des candidats potentiels de sources de rayonnement.

Chaque image à traiter est construite à partir de quatre images. Un détecteur de photons est dirigé vers une source possible de rayons gamma pendant un certain temps que l'on note  $t_{on}$ , et on compte le nombre de photons  $N_{on}$  que le détecteur reçoit pendant cet intervalle de temps. Cette première carte est donc constituée uniquement d'entiers et se retrouve fortement bruitée du fait que l'on détecte toutes les sources lumineuses, parasites ou non de la cible. On mesure par suite le bruit de fond en masquant le centre du détecteur pendant un temps  $t_{off}$  et on mesure le nombre de photons détectés  $N_{off}$ . Notons  $\alpha = \frac{t_{on}}{t_{off}}$ . A cela on peut mesurer l'efficacité de détection du détecteur dans chacun des cas :  $A_{on}$  et  $A_{off}$ . Le signal observé est donc le nombre de photons provenant de la source est donc :

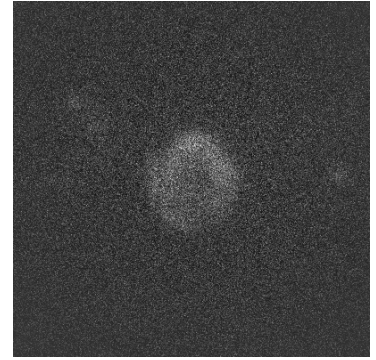
$$N_s = N_{on} - \alpha \frac{A_{on}}{A_{off}} N_{off} \quad (6.10)$$



(a) source J1841



(b) Source W51



(c) Source RXJ1713

FIGURE 6.18 : Exemples de sources de rayon gamma

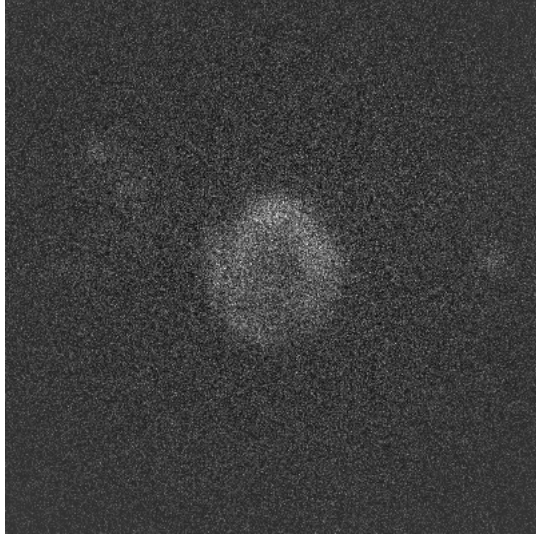
Sur les cartes finales obtenues (voir Exemples Figure 6.18(a), Figure 6.18(b) et Figure 6.18(c)), une partie du bruit est encore présente sur l'image pouvant encore une fois masquer la source de rayonnement. La problématique est de lisser les cartes tout en mesurant la significativité du signal final obtenu.

### 6.6.2 Significativité et lissage

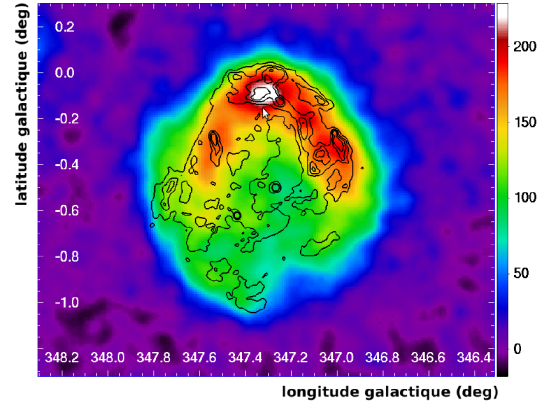
La méthode la plus classique du traitement de ces cartes, est d'utiliser des masques gaussiens de rayon très large, pour réduire au maximum le bruit dans les parties régulières, et de rassembler les zones de fortes intensités pour essayer de faire ressortir une source lumineuse. Plusieurs méthodes statistiques existent pour mesurer la significativité  $S$  du lissage. La méthode retenue par Jeremy Mehaut sur laquelle nous basons nos comparaisons est la suivante :

$$S = \sqrt{2} \left( N_{\text{on}} \ln \left[ \frac{1+\alpha}{\alpha} \left( \frac{N_{\text{on}}}{N_{\text{on}} + N_{\text{off}}} \right) \right] + N_{\text{off}} \ln \left[ (1+\alpha) \left( \frac{N_{\text{off}}}{N_{\text{on}} + N_{\text{off}}} \right) \right] \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.11)$$

L'utilisation des masques gaussiens de tailles très larges pose un problème dans l'estimation et la détection des sources lumineuses. Si l'on prend deux sources ponctuelles très proches l'une de l'autre, l'effet de flou engendré par les masques gaussiens, tendra vers la fusion des deux sources. Dans ce cas on perdra une partie de l'information et il sera plus difficile de détecter la position du maximum et donc du centre de rayonnement.



(a) Source RXJ1713



(b) Lissage de la carte RXJ1713 avec un masque gaussien. Les couleurs correspondent à la significativité du signal.

FIGURE 6.19 : Application d'un masque gaussien sur la carte RXJ1713. La réduction du bruit est très importante, mais on perd de l'information au niveau de la significativité du signal.

Sur l'exemple de la source RXJ1713 Figure 6.19(a), on utilise un masque gaussien pour réduire l'intensité du bruit sur l'image. Les problèmes liés à l'utilisation de tel masque, se retrouvent présent Figure 6.19(b). La source, que l'on peut repérer à l'œil nu, à la forme

d'un croissant, avec au nord le maximum du rayonnement. Pourtant l'étalement induit par le masque gaussien, ne permet plus, après lissage, de voir la forme du croissant. Les deux «bras» du croissant se retrouvent fusionnés. D'autres part, on remarque sur la carte lissée, que de part et d'autres du maximum, il existe des sources de rayonnement importantes. Déterminer si ce sont des sources ou alors des directions d'émissions très fortes de la source principale est impossible.

Dans ces travaux de thèse Jérémy Mehaut, propose une optimisation du lissage gaussien en adaptant la taille des masques gaussiens en fonction du spectre lumineux de l'image. En effet, la réduction du bruit doit être plus importante dans le fond de l'image et évidemment on souhaiterait que le lissage soit minimal dans les zones de sources de rayonnement. A partir de l'image  $N_s$ , ils utilisent un masque gaussien de petit rayon pour uniformiser l'histogramme des valeurs de l'image.

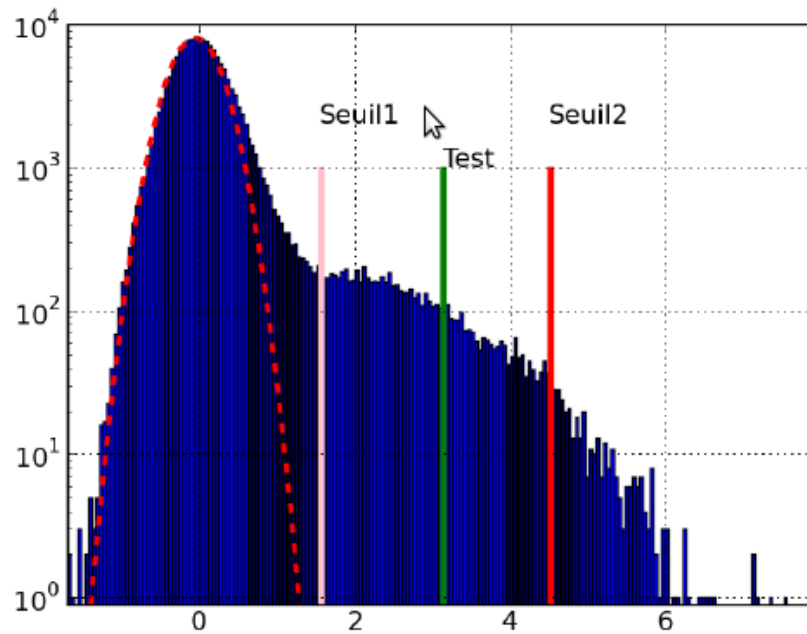


FIGURE 6.20 : Histogramme de l'image RXJ1713, après application d'un masque gaussien.

A partir de l'histogramme de l'image lissée Figure 6.20, on en déduit une zone (matérialisée par la parabole) qui correspond au bruit de fond de l'image. Cette gaussienne permet de déterminer trois seuils correspondants à trois fois l'écart type de la gaussienne pour découper le reste du signal. Cette segmentation de l'histogramme de valeurs confère la possibilité d'utiliser plusieurs tailles de masques en fonction de la valeur d'un pixel de l'image, de sorte à limiter l'impact des effets de flous aux abords des sources que l'on souhaite préserver.

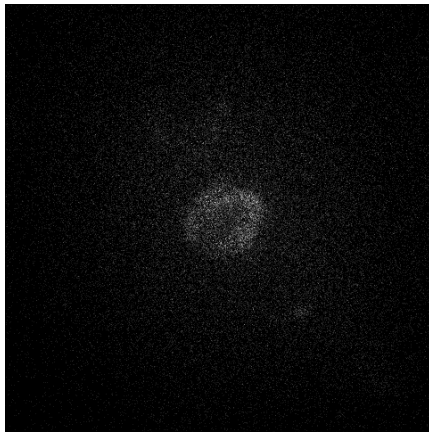
L'opérateur Laplacien adaptatif est finalement une méthode similaire à celle proposée.

Le comportement est gaussien sur le bruit de fond et renforce les contours aux abords de la source à préserver. Cependant, la taille du masque sur ces images a de l'importance, puisque dans le fond de l'image, on veut supprimer un maximum de bruit, donc augmenter la taille du masque, mais dans les zones où il y a du signal telle que l'image de la Figure 6.18(b), il faut un masque qui soit également suffisamment large pour regrouper un maximum d'informations, pour que le signal ne soit pas résorbé au même titre que le bruit de fond. Dans notre cas il est facile d'adapter la méthode de Jérémy Mehaut en prenant plusieurs seuils mais en utilisant un masque adaptatifs sur chacun des seuils. De cette façon, on optimise le lissage sur le fond et on augmente le contraste sur les points où il y a potentiellement un signal. Divers exemples sont données Figure 6.21

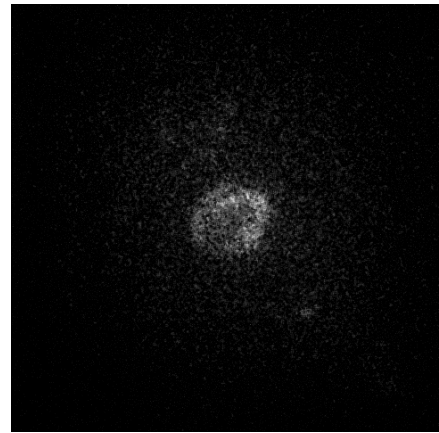
## 6.7 Conclusion

En conclusion, on a proposé une dernière application du processus de diffusion discret sur des images en niveau de gris. Une nouveauté par rapport à la géométrie discrète classique, c'est de ne plus considérer seulement les courbes binaires, mais aussi les courbes en niveau de gris. Il existe dans le domaine du traitement du signal, de nombreuses méthodes relatives à la réduction du bruit. Par le biais de notre processus discret, on retrouve des résultats similaires à ces différentes approches. Cela ouvre la possibilité de faire de l'analyse de fonctions et de surfaces discrètes en niveau de gris et pourquoi pas de définir des estimateurs de tangentes, de courbure et des normales de surfaces en niveau de gris. Les applications de la réduction du bruit sur des images et le renforcement des détails et encore une fois une façon de justifier que le processus de diffusion a un sens sur ces images. Les applications à la détection de sources astrophysiques ont été réalisées sur des images d'acquisitions réelles et l'on peut remarquer que les résultats attendus sont intéressants puisqu'ils renforcent la source tout en éliminant le bruit de fond.

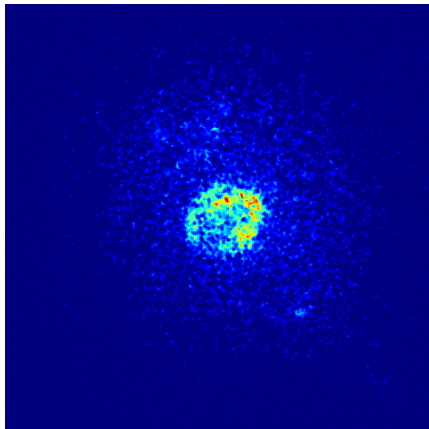




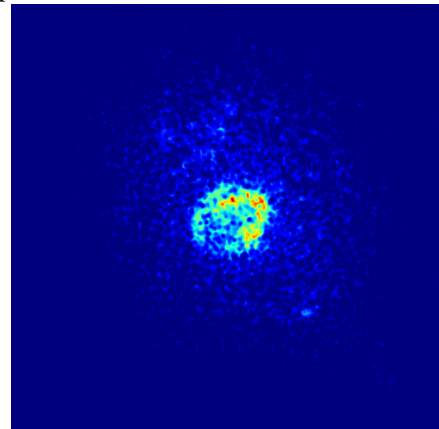
(a) Source RXJ1713



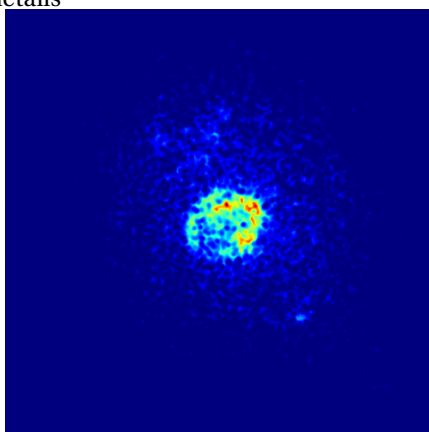
(b) Lissage de la carte RXJ1713 avec un masque adaptatif 3x3



(c) Lissage de la carte RXJ1713 avec un masque adaptatif 3x3 en RVB6.21(b) pour faire ressortir les détails



(d) Lissage de la carte RXJ1713 avec un masque adaptatif de taille 5x56.21(b) deuxième itération



(e) Lissage de la carte RXJ1713 avec un masque adaptatif 5x5 en RVB6.21(b) troisième itération

FIGURE 6.21 : Application d'un masque adaptatif sur la carte RXJ1713. La réduction du bruit est très importante, et on renforce les détails de la zone de rayonnement.





---

## Bibliographie

- [AE08] Remy Malgouyres Alex Esbelin. Calcul de primitives et d'équations différentielles linéaires en nombre entiers par noyaux binmiaux. 2008. Non cité.
- [ALM92] Luis Alvarez, P L Lions, and J M Morel. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. ii. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 29(3) :845–866, 1992. Cité pages [1](#) and [129](#).
- [And00] E. Andres. *Modélisation Analytique Discrète d'Objets Géométriques*. Habilitation à diriger des recherches, UFR Sciences Fondamentale et Appliquées - Université de Poitiers (France), Décembre 2000. Cité page [13](#).
- [ASWL11] Yi An, Cheng Shao, Xiaoliang Wang, and Zhuohan Li. Geometric properties estimation from discrete curves using discrete derivatives. *Computers & Graphics*, 35(4) :916–930, 2011. Cité pages [27](#), [36](#), [37](#), [38](#), and [108](#).
- [Bak02] P. Bakker. *Image structure analysis for seismic interpretation*. Thèse d'état, Delft University of Technology, 2002. Cité pages [1](#) and [130](#).
- [BB10] Valentin E. Brimkov and Reneta P. Barneva. Digital stars and visibility of digital objects. In Barneva et al. [\[BBH<sup>+</sup>10\]](#), pages 11–23. Cité page [70](#).
- [BB11] Michael M. Bronstein and Alexander M. Bronstein. Shape recognition with spectral distances. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 33(5) :1065–1071, 2011. Cité page [44](#).
- [BBH<sup>+</sup>10] Reneta P. Barneva, Valentin E. Brimkov, Herbert A. Hauptman, Renato M. Natal Jorge, and João Manuel R. S. Tavares, editors. *Computational Modeling of Objects Represented in Images, Second International Symposium, CompIMAGE*



- 2010, Buffalo, NY, USA, May 5-7, 2010. *Proceedings*, volume 6026 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2010. Cité pages 155 and 157.
- [BCM10] Antoni Buades, Bartomeu Coll, and Jean-Michel Morel. Image denoising methods. a new nonlocal principle. *SIAM Review*, 52(1) :113–147, 2010. Cité pages 1, 121, 122, and 130.
- [BG07] Alexander G. Belyaev and Michael Garland, editors. *Proceedings of the Fifth Eurographics Symposium on Geometry Processing, Barcelona, Spain, July 4-6, 2007*, volume 257 of *ACM International Conference Proceeding Series*. Eurographics Association, 2007. Cité page 160.
- [Bil99] Patrick Billingsley. *Convergence of probability measures*. Wiley Series in Probability and Statistics : Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1999. A Wiley-Interscience Publication. Cité page 48.
- [Bre65] Jack Bresenham. Algorithm for computer control of a digital plotter. *IBM Systems Journal*, 4(1) :25–30, 1965. Cité pages 2 and 8.
- [Bre77] Jack Bresenham. A linear algorithm for incremental digital display of circular arcs. *Commun. ACM*, 20(2) :100–106, 1977. Cité page 2.
- [CDRT00] David Coeurjolly, Isabelle Debled-Rennesson, and Olivier Teytaud. Segmentation and length estimation of 3d discrete curves. In *Digital and Image Geometry*, pages 299–317, 2000. Cité page 2.
- [Chl09] E.F.F. Chladni. *Traité d'acoustique*. Chez Courcier, 1809. Cité pages 42, 43, 76, and 162.
- [CK04] David Coeurjolly and Reinhard Klette. A comparative evaluation of length estimators of digital curves. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 26(2) :252–257, 2004. Cité page 2.
- [CLMC92] Francine Catté, Pierre-Louis Lions, Jean-Michel Morel, and Tomeu Coll. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29 :182–193, February 1992. Cité pages 1 and 129.
- [CMT01] David Coeurjolly, Serge Miguet, and Laure Tougne. Discrete curvature based on osculating circle estimation. In *IWVF*, pages 303–312, 2001. Cité page 31.
- [CSTD08] David Coeurjolly, Isabelle Sivignon, Laure Tougne, and Florent Dupont, editors. *Discrete Geometry for Computer Imagery, 14th IAPR International Conference, DGCI 2008, Lyon, France, April 16-18, 2008. Proceedings*, volume 4992 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2008. Cité pages 157 and 158.

- [DBL06] 2006 *International Conference on Shape Modeling and Applications (SMI 2006)*, 14-16 June 2006, Matsushima, Japan. IEEE Computer Society, 2006. Cité page 158.
- [DBL08] 2008 *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR 2008)*, 24-26 June 2008, Anchorage, Alaska, USA. IEEE Computer Society, 2008. Cité page 158.
- [DRR95] Isabelle Debled-Rennesson and Jean-Pierre Reveillès. A linear algorithm for segmentation of digital curves. *IJPRAI*, 9(4) :635–662, 1995. Cité pages 2, 17, 18, 19, and 21.
- [EM09] Henri-Alex Esbelin and Rémy Malgouyres. Convergence of binomial-based derivative estimation for noisy discretized curves. In *DGCI*, pages 57–66, 2009. Cité pages 26, 35, 98, and 108.
- [FM08] Sébastien Fourey and Rémy Malgouyres. Normals and curvature estimation for digital surfaces based on convolutions. In Coeurjolly et al. [CSTD08], pages 287–298. Cité pages 3, 26, 36, 88, and 112.
- [FMR10] Christophe Fiorio, Christian Mercat, and Frédéric Rieux. Curvature estimation for discrete curves based on auto-adaptive masks of convolution. In Barneva et al. [BBH<sup>+</sup>10], pages 47–59. Non cité.
- [Fre61] *On the encoding of arbitrary geometric configurations*, volume EC-10, 1961. Cité pages 2, 14, and 15.
- [FT99] Fabien Feschet and Laure Tougne. Optimal time computation of the tangent of a discrete curve : Application to the curvature. In *DGCI*, pages 31–40, 1999. Cité pages 2, 21, 29, 120, and 161.
- [GBAL09] Katarzyna Gebal, J. Andreas Bærentzen, Henrik Aanæs, and Rasmus Larsen. Shape Analysis Using the Auto Diffusion Function. In Konrad et al. [KMM09], pages 1405–1413. Cité page 44.
- [GWW92] Carolyn Gordon, David L. Webb, and Scott Wolpert. One cannot hear the shape of a drum. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 27(1) :134–138, 1992. Cité page 43.
- [HK83] S. H. Y. Hung and T. Kasvand. Critical points on a perfectly 8- or 6-connected thin binary line. *Pattern Recognition*, 16(3) :297–306, 1983. Cité pages 2, 14, and 16.
- [Hun85] S. H. Y. Hung. On the straightness of digital arcs. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 7(2) :203–215, 1985. Cité page 2.

- [J.99] Vittone J. *Caractérisation et reconnaissance de droites et de plan en géométrie*. Thèse d'état, Université Joseph Fourier Grenoble (France), Décembre 1999. Cité pages 11 and 12.
- [KL09] Bertrand Kerautret and Jacques-Olivier Lachaud. Multi-scale analysis of discrete contours for unsupervised noise detection. In Wiederhold and Barneva [WB09], pages 187–200. Cité pages 22, 32, 97, and 115.
- [KMM09] Polthier Konrad, Alexa Marc, and Kazhdan Michael, editors. *Symposium on Graphics Processing*. Eurographics Association, 2009. Cité pages 157 and 160.
- [Lév06] Bruno Lévy. Laplace-beltrami eigenfunctions towards an algorithm that "understands" geometry. In SMI [DBL06], page 13. Cité pages 43 and 70.
- [LFB94] Michael Lindenbaum, M. Fischer, and Alfred M. Bruckstein. On gabor's contribution to image enhancement. *Pattern Recognition*, 27(1) :1–8, 1994. Cité pages 1, 3, and 124.
- [LV03] Jacques-Olivier Lachaud and Anne Vialard. Geometric measures on arbitrary dimensional digital surfaces. In Nyström et al. [NDBS03], pages 434–443. Cité page 21.
- [LVdV07] Jacques-Olivier Lachaud, Anne Vialard, and François de Vieilleville. Fast, accurate and convergent tangent estimation on digital contours. *Image Vision Comput.*, 25(10) :1572–1587, 2007. Cité pages 2, 3, 20, 21, 26, 29, 30, 97, and 120.
- [LW00] Christoph Lincke and Charles A. Wüthrich. Towards a unified approach between digitizations of linear objects and discrete analytical objects. In WSCG, 2000. Cité page 13.
- [MBF08] Rémy Malgouyres, Florent Brunet, and Sébastien Fourey. Binomial convolutions and derivatives estimation from noisy discretizations. In Coeurjolly et al. [CSTD08], pages 370–379. Cité pages 1, 2, 35, and 112.
- [Mer01] Christian Mercat. Discrete Riemann surfaces and the Ising model. *Comm. Math. Phys.*, 218(1) :177–216, 2001. Cité page 82.
- [MHK<sup>+</sup>08] Diana Mateus, Radu Horaud, David Knossow, Fabio Cuzzolin, and Edmond Boyer. Articulated shape matching using laplacian eigenfunctions and unsupervised point registration. In CVPR [DBL08]. Non cité.
- [MMU96] Serge Miguet, Annick Montanvert, and Stéphane Ubéda, editors. *Discrete Geometry for Computer Imagery, 6th International Workshop, DCGI'96, Lyon*,

- France, November 13-15, 1996, *Proceedings*, volume 1176 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 1996. Cité page 160.
- [MSK95] Jiri Matas, Z. Shao, and Josef Kittler. Estimation of curvature and tangent direction by median filtered differencing. In *ICIAP*, pages 83–88, 1995. Cité pages 2, 26, 30, 34, and 161.
- [NdBS03] Ingela Nyström, Gabriella Sanniti di Baja, and Stina Svensson, editors. *Discrete Geometry for Computer Imagery, 11th International Conference, DGCI 2003, Naples, Italy, November 19-21, 2003, Proceedings*, volume 2886 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2003. Cité page 158.
- [NDR07] Thanh Phuong Nguyen and Isabelle Debled-Rennesson. Curvature estimation in noisy curves. In *CAIP*, pages 474–481, 2007. Cité pages 3, 18, 22, 26, and 120.
- [NTY01] N. Nadirashvili, Dzh. Tot, and D. Yakobson. Geometric properties of eigenfunctions. *Uspekhi Mat. Nauk*, 56(6(342)) :67–88, 2001. Cité page 43.
- [OMMG10] M. Ovsjanikov, Q. Mérigot, F. Mémoli, and L. Guibas. One point isometric matching with the heat kernel. In *Eurographics Symposium on Geometry Processing (SGP)*, volume 29, 2010. Non cité.
- [PG11] Laurent Provot and Yan Gérard. Estimation of the derivatives of a digital function with a convergent bounded error. In *DGCI*, pages 284–295, 2011. Cité page 26.
- [PM90] Pietro Perona and Jitendra Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 12(7) :629–639, 1990. Cité pages 1, 127, 128, and 134.
- [PP93] Ulrich Pinkall and Konrad Polthier. Computing discrete minimal surfaces and their conjugates. *Experiment. Math.*, 2(1) :15–36, 1993. Non cité.
- [Rev91] J.-P. Reveillès. *Géométrie discrète, Calcul en nombres entiers et algorithmique*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France, 1991. Cité pages 2, 11, 12, 14, 16, and 17.
- [RL11] Tristan Roussillon and Jacques-Olivier Lachaud. Accurate curvature estimation along digital contours with maximal digital circular arcs. In *IWCIA*, pages 43–55, 2011. Cité pages 31 and 32.
- [Ros74] A. Rosenfeld. Digital straight line segments. *IEEE Transactions on Computers*, 23(12) :1264–1269, 1974. Cité pages 2, 14, 15, and 16.

- [RST10] Tristan Roussillon, Isabelle Sivignon, and Laure Tougne. Measure of circularity for parts of digital boundaries and its fast computation. *Pattern Recognition*, 43(1) :37–46, 2010. Cité pages [31](#) and [32](#).
- [Rus07] Raif M. Rustamov. Laplace-beltrami eigenfunctions for deformation invariant shape representation. In Belyaev and Garland [[BG07](#)], pages 225–233. Cité page [44](#).
- [SOG09] Jian Sun, Maks Ovsjanikov, and Leonidas Guibas. A Concise and Provably Informative Multi-Scale Signature Based on Heat Diffusion. In Konrad et al. [[KMM09](#)], pages 1383–1392. Cité page [44](#).
- [Tsc] D. Tschumperlé. *PDE-Based Regularization of Multivalued Images and Applications*. PhD thesis, University of Nice-Sophia Antipolis, University of Nice-Sophia Antipolis/France. Cité page [1](#).
- [Via96] Anne Vialard. Geometrical parameters extraction from discrete paths. In Miquet et al. [[MMU96](#)], pages 24–35. Cité pages [27](#), [28](#), and [29](#).
- [WB09] Petra Wiederhold and Reneta P. Barneva, editors. *Combinatorial Image Analysis, 13th International Workshop, IWCIA 2009, Playa del Carmen, Mexico, November 24-27, 2009. Proceedings*, volume 5852 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2009. Cité page [158](#).
- [Wei96] J. Weickert. *Anisotropic diffusion in image processing*. Kaiserslautern, 1996. Cité page [26](#).
- [Whi93] R. Whitaker. *Geometry limited diffusion*. Thèse d'état, University of North Carolina, 1993. Cité page [128](#).
- [WS93] M. Worring and A. W. Smeulders. Digital curvature estimation. *CVGIP : IMAGE UNDERSTANDING*, 58(3) :366–382, 1993. Cité pages [3](#), [26](#), [31](#), [33](#), and [112](#).

## Table des figures

2.1	Illustration de la 0 et 1 connexité sur $\mathbb{Z}^2$ . . . . .	10
2.2	Illustration de la 0, 1 et 2-connexité sur $\mathbb{Z}^3$ . . . . .	11
2.3	Exemple de discrétisation d'un canard suivant la méthode OBQ . . . . .	12
2.4	Exemple de discrétisation d'un canard suivant la méthode BBQ . . . . .	12
2.5	Exemple de discrétisation d'un canard suivant la méthode GIQ . . . . .	13
2.6	Exemple de discrétisation d'un canard suivant la méthode de Supercouverture . . . . .	14
2.7	Figure de gauche, représentation du code de Freeman pour les courbes 0-connexe, à droite exemple de codage. . . . .	15
2.8	Exemples de droites 0-connexe et 1 connexe. Sur les deux figures, on a représenté les droites supports qui délimitent les points entiers de la droite. . . . .	17
2.9	Droites et points d'appuis de la droite 0-connexe $\mathcal{D}(3, 8, 0, -4)$ . . . . .	19
2.10	Segmentation d'un contour discret . . . . .	20
3.1	Tangentes discrètes d'un contour au point P et Q . . . . .	27
3.2	Exemple de calcul de l'algorithme de Feschet et Tougne [FT99]. Dans un premier temps on utilise l'algorithme de Vialard pour déterminer la tangente au point P. Ensuite, à l'aide des points R et L, on détermine le point M qui correspond au premier point dont les caractéristiques de la tangente n'est pas la même. De cette façon, plutôt que de calculer en tout point de la courbe les tangentes, on passe directement au point M pour le calcul de la tangente suivante. Dans leur papier, cette astuce permet de passer la complexité de quadratique sur des segments discrets à une complexité linéaire. . . . .	29
3.3	Séparation des points intérieurs B et extérieurs $\bar{B}$ d'un contour discret . . . . .	31
3.4	Arc de cercle . . . . .	32
3.5	Illustration de l'algorithme de J. Mattas, Z. Shao et J. Kittler [MSK95] . . . . .	34

4.1	Figures Acoustiques de Chladni, <i>Traité d'acoustique</i> [Chl09] . . . . .	43
4.2	Représentation d'une chaîne de Markov sous forme de graphe sur $\mathbb{Z}$ . . . . .	46
4.3	Exemple de distribution de 24 marcheurs sur un contours discret. On décompose le processus en deux parties : tout d'abord répartition sur les coins du pixel de départ, puis répartition sur les pixels alentours. . . . .	50
4.4	Exemple de diffusion sur un segment de droite de pente $\frac{3}{9}$ . On construit le graphe d'adjacence dont les arêtes sont pondérées par les valeurs de la diffusion. Ensuite Figure 4.4(b) on démarre la diffusion en plaçant un marcheur sur le pixel en vert (vecteur $\pi_0$ ). Enfin on calcule par la formule donnée Théorème 4.3.10, la valeur finale de la répartition des marcheurs. Le résultat final est multiplié par 128, pour avoir des entiers en chaque pixel de la courbe. . . . .	51
4.5	Illustration de la Propriété 4.4.4. Les poids de la diffusion sont donnés par les coefficients binomiaux. . . . .	54
4.6	Sur $\mathbb{Z}^2$ les droites discrètes sont composées uniquement de quatre classes d'équivalence. . . . .	54
4.7	Exemples de diffusion de marcheurs sur des droites discrètes. . . . .	57
4.8	Comparaison entre l'écart type théorique calculé à partir de la proportion des classes d'équivalence et de l'écart type réel issu de la distribution statistique des poids. En fonction du nombre de points, on peut remarquer la convergence rapide. . . . .	58
4.9	Projection d'une droite discrète naïve (à gauche) et d'une droite discrète épaisse (à droite). Pour les droites épaissies, on ramène les marcheurs qui se sont égarés dans l'épaisseur après la projection. . . . .	60
4.10	Calcul des écarts types sur 200 droites discrètes de pente croissante en utilisant soit l'index soit l'abscisse curviligne. Les résultats sont différents en fonction de la méthode choisie. . . . .	62
4.11	Calcul des écarts types sur 200 droites discrètes de pente croissante en utilisant l'abscisse curviligne pour des valeurs de $\lambda$ et $\mu$ comprise entre 0 et 1 . . . . .	67
4.12	Solutions de l'équation $P(\lambda, \mu) = 0$ pour $0 \leq \lambda \leq 1$ et $0 \leq \mu \leq 1$ . . . . .	68
4.13	Exemples d'étoiles discrète $\mathbb{Z}^2$ . Il existe plusieurs solutions pour le centre de ces étoiles. . . . .	71
4.14	Premier vecteur propre du Laplacien sur une étoile discrète simple. Le Laplacien adaptatif permet de retrouver les informations sur les axes de symétries de l'étoile. Le vecteur propre 2 et 3 Figure 4.14(a) et Figure 4.14(b) donnent les deux premiers axes de symétries. Ensuite Figure 4.14(c), Figure 4.14(d) et Figure 4.14(e) permettent de segmenter l'étoile selon ses parties convexes. . . . .	72
4.15	Exemples de centroides détectés par les vecteurs propres du Laplacien. . . . .	75
4.16	Autre exemple sans symétrie. L'opérateur Laplacien ignore la courbure des branches de l'étoile et il faut continuer l'intersection des vecteurs propres pour trouver un centroïde plus pertinent. . . . .	75
4.17	Exemple de décomposition spectrales sur une pieuvre . . . . .	76

4.18	Contours des ondes acoustiques sur une plaque de métal triangulaire. . . . .	77
4.19	Contour discret des vecteurs propres obtenu sur une assiette carré avec un pas de discrétisation de $\frac{1}{100}$ . On dessine en rouge et bleu les valeurs du vecteur propre et en noir les valeurs nulles. . . . .	77
4.20	On retrouve les contours continus observés par Chladni en 1802 sur les contours discrets obtenus à l'aide de la décomposition spectrale de l'opérateur de Laplace discret. . . . .	77
4.21	Contour discret des vecteurs propres obtenu sur une guitare avec un pas de discrétisation de $\frac{1}{100}$ . On dessine en rouge et bleu les valeurs du vecteur propre et en noir les valeurs nulles. . . . .	78
4.22	Exemple d'application du Laplacien discret sur une main en trois dimensions. Remarquons Figure 4.22(a) et Figure 4.22(b) les modes de vibrations des doigts les uns par rapport aux autres. Enfin Figure 4.22(c), on applique le heat kernel signature de la même façon que sur les surfaces maillées. On retrouve bien le bout des doigts, les parties plates comme la paume de la main ou l'intérieur des doigts. . . . .	79
4.23	Exemple de réseaux de diamants. Figure 4.23(a), on calcule le rapport de la diagonale d'un élément constituant le réseau. Ensuite Figure 4.23(b) et Figure 4.23(b) deux exemples de réseaux pour $\rho = 1$ et $\rho = 2$ . . . . .	79
4.24	Illustration de la diffusion sur un réseau de diamants. Pour un voisinage $V$ on a les poids pour chaque voisins suivants . . . . .	81
4.25	Illustration du Théorème 4.6.9. Sur un réseau de diamants avec $\rho = 1$ Figure 4.25(a), les isovaleurs (en couleurs) sont données par les nombres binomiaux. On retrouve donc un résultat très classique. Par contre quand on compresse la grille, Figure 4.25(b), on retrouve encore des cercles pour les isovaleurs. . . . .	83
4.26	Un ensemble de voxels $\Sigma$ muni de ces normales. On projette chaque surfel dans le plan tangent. . . . .	84
4.27	Illustration du processus de diffusion sur une structure conforme. . . . .	85
5.1	Exemple de cercles situés sur la normale au point $P$ . . . . .	90
5.2	Calcul du cercle osculateur au point $P_0$ . . . . .	91
5.3	Masques de convolution associé à l'estimation de la dérivée . . . . .	96
5.4	Illustration de la convergence de l'estimation de la dérivée seconde de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ (en trait continu). Le pas de discrétisation est réduit de $h = \frac{1}{2}$ (jaune) vers $h = \frac{1}{3}$ (rouge), $h = \frac{1}{5}$ (bleu) et $h = \frac{1}{10}$ (vert), pour un masque de taille fixé égal à 20 . . . . .	99
5.5	Exemples d'estimation des dérivées pour les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto 20\sin(2x)$ . . . . .	100



5.6	Exemples d'estimations de la dérivée première et seconde. On peut comparer les résultats à la première estimation de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ (Figure. 5.5(a)). On voit la convergence rapide de la méthode pour un masque peu large (masque de taille 300 utilisé pour plus de 6000 points). En rouge on a l'estimation et en bleu la valeur réelle de la dérivée. . . . .	100
5.7	Exemples d'estimations des tangentes basées sur la méthode des moindres carrés. Contrairement à la méthode initiale qui cherche à passer au mieux par tous les points de la courbe, le processus de diffusion permet de fixer la tangente en un point et les autres points servent à adapter la pente en fonction des contraintes de diffusion . . . . .	104
5.8	Exemples d'applications de la méthode des moindres carrés sur des surfaces en trois dimensions. Les deux premières servent de repère pour vérifier la pertinence de la méthode. La troisième figure en revanche permet de voir le comportement de la détection du plan tangent grâce au processus de diffusion. On trouve le plan tangent passant par le pixel de coin avec la bonne orientation . . .	106
5.9	Exemples d'applications de la méthode des différences finies pour estimer les dérivées d'ordres supérieurs à 1. On utilise la taille du masque pour gommer les artefacts liés à l'imprécision de l'estimation de la dérivée d'ordre inférieur. . . .	107
5.10	Exemples d'estimation de la courbure de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ . Malgré un pas de discrétisation faible et un masque de petite taille, on obtient une très bonne approximation de la courbure Figure. 5.10(b) dont on peut voir une estimation des dérivées premières et secondes Figure. 5.10(a). Enfin quand on fait tendre le pas de la grille vers zéro, l'estimateur semble converger vers la courbure de la fonction réelle. . . . .	114
5.11	Exemple de détection de pixels déconnectés par étude de la diagonale de la matrice d'adjacence. Il apparaît assez nettement deux lignes avec de très hautes valeurs sur la diagonale, qui correspondent aux points avec très peu de voisins. De ce fait il est facile d'éliminer rapidement les points déconnectés de la courbe.	116
5.12	Exemple de détection de bruit dans un contour. Figure. 5.12(a) et Figure. 5.12(c), malgré le fait qu'il n'y ait aucun bruit on détecte des zones de bruit. Il s'agit simplement d'un effet de bords, dû au rebond de la diffusion sur la courbe. En revanche, on détecte bien les zones où il y a une perturbation liée aux pixels ajoutés par le bruit. . . . .	118
6.1	Image classique de Lena. Sur l'image de gauche, l'image originale, sur la droite l'image avec du bruit blanc. . . . .	122
6.2	Zoom sur un détail de l'œil de Lena. L'image de gauche est obtenue à partir de l'image classique auquel on ajoute un bruit additif gaussien. L'image de droite est le résultat après application d'un masque moyennneur. Le flou obtenu est très important et malgré la réduction importante du bruit on a perdu une partie des détails de l'œil. . . . .	124

6.3	Zoom sur un détail de l'œil de Lena. On applique à l'image avec du bruit de Lena deux masques de convolutions gaussiens de taille 3x3 pour l'image de gauche et 5x5 pour l'image de droite. Plus la taille du masque est importante, plus les effets de flous aux niveaux des contours sont importants. Là encore, on a réduit de façon considérable le bruit au détriment de la netteté des contours. . . . .	125
6.4	Zoom sur un détail de l'œil de Lena. On applique un masque gaussien sur l'image de gauche et un masque 3x3 médian sur l'image de droite. On remarque que les contours sont plus nets sur l'image de droite, et que les couleurs sont moins atténuées. . . . .	127
6.5	Base locale à proximité d'un contour. . . . .	129
6.6	Exemple d'application d'un filtre anisotrope sur l'image classique de Lena avec 20% bruit blanc. . . . .	131
6.7	Découpage du voisinage pour un filtre de Kuwahara . . . . .	131
6.8	Exemple d'application d'un filtre Kuwahara sur l'image classique de Lena avec 20% bruit blanc. . . . .	132
6.9	Exemple d'application d'un filtre basé sur les valeurs des voisins les plus proches sur l'image classique de Lena avec 20% bruit blanc. . . . .	133
6.10	Exemple d'application de filtres classiques sur l'image classique de Lena avec 20% bruit blanc. . . . .	135
6.11	Une image classique en traitement du signal : Lena. Sur ce détail, on peut remarquer les différences entre les divers filtres utilisés. Le masque gaussien Figure 6.11(c) perd de l'information au niveau des détails et de la netteté, par contre le masque médian renforce les contours, mais on perd en qualité au niveau des détails (Figure 6.11(d)). Le masque adaptatifs réduit moins le bruit qu'un masque gaussien, mais une grande partie des détails est conservée et les parties fines (structures de l'œil) sont préservées. . . . .	136
6.12	Comparaison du résultat du lissage à partir de différents masques de convolution sur un exemple. On retrouve ici la préservation du contour grâce au masque médian, et remarquons que le masque adaptatif floute beaucoup moins le contour que le masque gaussien. . . . .	141
6.13	Comparaison du résultat du lissage à partir de différents masques de convolution sur un exemple. De façon très nette, on remarque que le masque adaptatifs préserve les parties fines. Le masque médian en revanche détruit les parties fines, et le masque gaussien atténue la valeur. . . . .	142
6.14	Une image classique en traitement du signal : le Mandrill. Cette image possède plusieurs caractéristiques pour tester la viabilité des méthodes de traitement du signal, notamment les structures fines tels que les poils de la barbe et la structure nasale. C'est donc un parfait exemple d'applications des masques adaptatifs. Sur l'image de gauche du bruit blanc a été ajouté, sur l'image de droite du bruit épars. . . . .	144

6.15	Comparaison avec divers filtres classiques de réduction de bruit sur un extrait de lettres manuscrites . . . . .	145
6.16	Création d'une image support en utilisant la courbe des couleurs. Sur cette image de paon, on souhaite préserver la structure fine et les yeux des plumes. Pour optimiser la convolution, les zones d'intérêts sont mises en noir en jouant sur la balance des niveaux de gris, de façon à construire des masques de convolution qui tiennent compte de ces zones. . . . .	146
6.17	Comparaison entre diverses méthodes de convolution sur l'image d'un paon avec bruit blanc. . . . .	148
6.18	Exemples de sources de rayon gamma . . . . .	149
6.19	Application d'un masque gaussien sur la carte RXJ1713. La réduction du bruit est très importante, mais on perd de l'information au niveau de la significativité du signal. . . . .	150
6.20	Histogramme de l'image RXJ1713, après application d'un masque gaussien. . . .	151
6.21	Application d'un masque adaptatif sur la carte RXJ1713. La réduction du bruit est très importante, et on renforce les détails de la zone de rayonnement. . . . .	153

## Abstract

The context of discrete geometry is in  $\mathbb{Z}^n$ . We propose to describe discrete curves and surfaces composed of voxels: how to compute classical notions of analysis as tangent and normals ? Computation of data on discrete curves use average mask. A large amount of works proposed to study the pertinence of those masks. We propose to compute an average mask based on random walk. A random walk starting from a point of a curve or a surface, allow to give a weight, the time passed on each point. This kernel allow us to compute average and derivative. The studied of this digital process allow us to recover classical notions of geometry on meshes surfaces, and give accuracy estimator of tangent and curvature. We propose a large field of applications of this approach recovering classical tools using in transversal community of discrete geometry, with a same theoretical base.

**Keywords:** *Markov Process, Discrete Geometry, Tangent Estimator, Normals, Curvature, Kernel Diffusion, Image Analysis.*

---

## Résumé

Le contexte est la géométrie discrète dans  $\mathbb{Z}^n$ . Il s'agit de décrire les courbes et surfaces discrètes composées de voxels: les définitions usuelles de droites et plans discrets épais se comportent mal quand on passe à des ensembles courbes. Comment garantir un bon comportement topologique, les connexités requises, dans une situation qui généralise les droites et plans discrets? Le calcul de données sur ces courbes, normales, tangentes, courbure, ou des fonctions plus générales, fait appel à des moyennes utilisant des masques. Une question est la pertinence théorique et pratique de ces masques. Une voie explorée, est le calcul de masques fondés sur la marche aléatoire. Une marche aléatoire partant d'un centre donné sur une courbe ou une surface discrète, permet d'affecter à chaque autre voxel un poids, le temps moyen de visite. Ce noyau permet de calculer des moyennes et par là, des dérivées. L'étude du comportement de ce processus de diffusion, a permis de retrouver des outils classiques de géométrie sur des surfaces maillées, et de fournir des estimateurs de tangente et de courbure performants. La diversité du champs d'applications de ce processus de diffusion a été mise en avant, retrouvant ainsi des méthodes classiques mais avec une base théorique identique.

**Mots clefs :** *Processus Markovien, Géométrie discrète, Estimateur tangentes, normales, courbure, Noyau de diffusion, Analyse d'images.*